BIBLIOTECA CLÁSICA GREDOS, 155

EUCLIDES

ELEMENTOS

LIBROS I-IV

INTRODUCCIÓN DE
LUIS VEGA

TRADUCCIÓN Y NOTAS DE
MARÍA LUISA PUERTAS CASTAÑOS



EDITORIAL GREDOS

Asesor para la sección griega: CARLOS GARCÍA GUAL.

Según las normas de la B. C. G., la traducción de este volumen ha sido revisada por PALOMA ORTIZ.

Sánchez Pacheco, 81, Madrid, 1991.

Depósito Legal: M. 28297-1991.

ISBN 84-249-1463-5. Obra completa.
ISBN 84-249-1464-3. Tomo I.

Impreso en España. Printed in Spain.
Gráficas Cóndor, S. A., Sánchez Pacheco, 81, Madrid, 1991. — 6422.

INTRODUCCIÓN GENERAL

I. «EUCLIDES», UN NOMBRE PARA LA GEOMETRÍA

A mediados del siglo pasado, Augustus de Morgan se hacía eco de una creencia común cuando aseguraba que no hay un sistema de geometría digno de tal nombre que se aparte sustancialmente del plan trazado en los *Elementos*. Hoy ya no podemos compartir esta opinión. Pero tenemos tan buenos motivos como los que había entonces para maravillarnos. No suele ocurrir que un solo tratado funde de una vez por todas una disciplina científica; aún es más extraño que además represente por más de veinte siglos el espejo y la norma del rigor en ésa y otras ciencias de la misma familia. Se diría que la historia de las fundaciones, pródiga de suyo en gestas y milagros, sólo conoce como mucho un caso así: la fundación de la geometría y del llamado «método axiomático» con los *Elementos* de Euclides. Por ello, quizás, los empeñados en buscarle algún término de comparación acuden a la mitología: el tópico más recordado a este propósito es el nacimiento de Atenea, en la plenitud de sus armas y atributos, de la cabeza de Zeus. Pero ni siquiera la retórica de un parto tan singular haría plena justicia al acontecimiento, pues, para

colmo, el autor de los *Elementos* estuvo lejos de ser un dios resplandeciente; Euclides fue —a juzgar por lo poco que sabemos— un oscuro profesor.

Los visos de milagro de los *Elementos* tienen mucho que ver, desde luego, con la escasez de noticias sobre los precedentes matemáticos del tratado y con la absoluta falta de información sobre las circunstancias que rodearon su composición por parte de Euclides. Sólo sabemos que, en el curso del siglo III a. C., los *Elementos* vuelven ociosa cualquier obra anterior de análoga factura en geometría; representan el tratado «elemental» por antonomasia. Luego, con el paso del tiempo, las señas de identidad del propio Euclides se van reduciendo a ésta: «*ho stoikheiotés* = el autor de los *Elementos*, el "elementador"» (*vid.*, por ej., Elías, *Comentarios a las Categorías de Aristóteles* 251, 18). Su nombre no tardará en convertirse en el epónimo que hoy nos es familiar: un nombre para la geometría. Eliano, un polígrafo de los siglos II-III, ya afirmaba en un tratado sobre los animales [*Perì dsóon idiótetos*] que «las arañas pueden trazar un círculo sin necesitar nada de Euclides», *i.e.* sin necesidad de conocimientos geométricos. Aún es más explícita la confesión de E. M. Forster a la hora de presentar a Euclides en su célebre guía de Alejandría: «Nada sabemos de él: a decir verdad, hoy lo consideramos como una rama del saber más que como un hombre» (*Alejandría. Historia y Guía,* 1961[3], Sec. I E, i).

Cabe pensar, entonces, que la fortuna institucional misma del tratado no sólo hizo que se perdiera el rastro de otros *Elementos* anteriores, sino que veló para siempre el rostro de su autor. La cuestión de si los *Elementos* de Euclides ocultan su pasado, es un asunto polémico y delicado. Lo que nadie discute es el desvanecimiento de quien los escribió.

1. *Oscuro autor, incierto personaje*

Sobre la vida —no ya los milagros— del propio Euclides, sólo parece haber dos referencias relativamente dignas de crédito. Una: fue más joven que los discípulos de Platón (muerto en el 347), mayor que Arquímedes (nacido hacia el 287), coetáneo del instaurador de la dinastía tolemaica, Tolemeo Sóter (367/6-283). Y dos: enseñó o formó escuela en Alejandría.

Una indicación sobre el momento que toca vivir a Euclides se encuentra al final del resumen histórico de Proclo (*Comentarios al libro I de los Elementos de Euclides* 68, 6-23). Según Proclo: «vivió en tiempos del primer Tolemeo, pues Arquímedes, que vino inmediatamente después, menciona a Euclides» (68, 12-14). Este juicio no se justifica por la alusión a los *Elementos* I, 2, que aparece en *Sobre la esfera y el cilindro* de Arquímedes, pues seguramente se trata de una interpolación; pero casa perfectamente con la observación de un autor bastante próximo, Ateneo —siglo II a. C.—, quien apunta en el *Banquete de los sofistas* (VI 250) que Euclides había sido un «comensal [*parásitos*]» de Tolemeo I; cuadra también con las distancias que el tratado guarda a veces, en la demostración de resultados anteriormente conocidos, respecto de ciertas pruebas reseñadas por Aristóteles y respecto de algunas contribuciones debidas a los matemáticos anteriores más o menos relacionados con la Academia de Platón (Teeteto, Eudoxo, Menecmo)[1]. Precisamente, en el pasaje antes citado, Proclo introduce a Euclides con estos términos:

[1] Cf. las pruebas recordadas por Aristóteles que se encuentran en T. L. Heath, *Mathematics in Aristotle*, Nueva York-Londres, 1949, reimp. 1980. Sobre las contribuciones de la tradición matemática anterior, *vid.*

No mucho más joven (que Hermótimo de Colofón y Filipo de Medma, discípulos de Platón) es Euclides, quien compiló los elementos poniendo en orden varios teoremas de Eudoxo, perfeccionando muchos resultados de Teeteto y dando así mismo pruebas incontestables de aquello que sus predecesores sólo habían probado con escaso rigor *(Com.* 68, 6-12).

Esta apreciación viene corroborada por otras fuentes. A Teeteto se le reconocían ciertos progresos en el estudio sistemático de las magnitudes inconmensurables iniciado por Teodoro (Platón, *Teeteto* 147c-148b); pues bien, en un comentario sobre el libro X de los *Elementos* atribuido a Pappo, Euclides es alabado por dar criterios seguros para la conmensurabilidad y la inconmensurabilidad en general, precisar algunas nociones y distinciones en este sentido, establecer varias clases de magnitudes irracionales y mostrar con claridad su campo de aplicación. Eudoxo había sido celebrado por su contribución a una teoría general de la proporción; pues bien, el escolio 3.° al libro V de los *Elementos,* que sienta las bases de esa teoría, declara:

Algunos dicen que este libro es descubrimiento de Eudoxo, coetáneo de Platón... Pero la disposición del libro en punto a los elementos y al orden de consecuencia de los teoremas es reconocida por todos como obra de Euclides (Stamatis, ed. cit., V (1977), pág. 213).

W. R. KNORR, *The Evolution of the Euclidean Elements,* Dordrecht-Boston, 1975; D. H. FOWLER, *The Mathematics of Plato's Academy,* Oxford, 1987. En I. THOMAS, ed., *Selections of Greek Mathematics,* Londres-Cambridge (Mass.), 1939 (1967^3) hay algunos textos significativos en versión bilingüe (griego-inglés). Las referencias al *Comentario* de Proclo se atienen a G. FRIEDLEIN, ed., *Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii,* Leipzig, 1873 (reimp. 1967); suele ser más accesible la versión de G. MORROW, *Proclus. A Commentary on the First Book of Euclid's Elements,* Princeton, Nueva Jersey, 1970.

Por otra parte, sabemos que Euclides toma en sus *Fenómenos* ciertas proposiciones de *Sobre la esfera en movimiento* de Autólico —sin mencionar la fuente—; Autólico fue maestro de Arcesilao, nacido hacia 315; aunque no disponemos de más datos, es probable que Autólico, a su vez, se moviera entre la 2.ª mitad del siglo IV y el 1.^{er} tercio del siglo III. En fin, las fechas del reinado de Tolemeo (304-285/3) son las mejor documentadas; tal vez sea un privilegio del que funda una dinastía frente a quien se limita a fundar un cuerpo de conocimientos.

La segunda referencia, acerca de la enseñanza de Euclides en Alejandría, procede de Pappo *(Colección* VII 35): cuenta que Apolonio de Perge había frecuentado durante algún tiempo —en torno a 250— a los discípulos de Euclides en Alejandría. La existencia y el peso de esta escuela alejandrina están fuera de dudas. Hay señales del celo de algunos miembros por asegurar una especie de ortodoxia euclídea tanto en el cultivo de la matemática elemental como en la investigación avanzada; ni los talentos mejor dotados y más innovadores de la época (Conón, Arquímedes, Apolonio) dejaron de plegarse a la pronta institucionalización alejandrina de ciertos supuestos y métodos de la prueba matemática consagrados por los *Elementos.*

En suma: si redondeamos las fechas de que disponemos, podemos estimar que Euclides alcanzó su madurez en torno al año 300 a. C. Es hacia entonces cuando, por convención, se suelen fechar los *Elementos* [2].

[2] Cf., por ej., F. O. HULTSCH, «Eukleides», en la PAULY-WISSOWA, *Realencyclopädie der klassischen Altertumswissenschaft,* Stuttgart, 1909 (reimp. 1970), VI 1, col. 1004; I. BULMER-THOMAS, «Euclid. Life and Works», en CH. C. GILLISPIE, dir., *Dictionary of Scientific Biography,* IV, Nueva York, 1970-1980, (reimp. 1981), pág. 415. En P. M. FRAZER, *Ptolemaic Alexandria,* Oxford, 1972, I, págs. 386-388; II, nota 82, puede verse una discusión al respecto.

Con el curso del tiempo, Euclides deviene un personaje de historias y leyendas, a veces presa de malentendidos. Las historias de los polígrafos griegos tienden a moralizar en un severo tono neoplatónico. Según Estobeo *(Extractos, preceptos, consejos* II 31, 114), en cierta ocasión uno de sus oyentes, nada más escuchar la demostración del primer teorema, se había apresurado a preguntar por la ganancia que podía obtener de cosas de ese género; Euclides, volviéndose hacia un sirviente, habría ordenado: «Dale 3 óbolos, pues necesita sacar provecho de lo que aprende». También se decía que, en otra ocasión, Tolemeo Sóter —a quien podemos suponer harto ocupado en asuntos de otro tipo— se había interesado, cortésmente quizá, por una vía de acceso al conocimiento geométrico menos fatigosa, más rápida y llana que la de los *Elementos;* la respuesta atribuida a Euclides habría sido algo seca y cortante: «No hay camino de reyes en geometría», réplica que el propio Estobeo prefiere poner en boca de Menecmo y ante Alejandro Magno *(ibid.* II 31, 115). Algunos matemáticos de ayer (G. H. Hardy) y de hoy (E. C. Zeeman) todavía consideran a Euclides como un digno y envarado colega de otra universidad. Esta impresión no se compadece con la que sugiere Pappo cuando alaba su talante comprensivo y afable [*eumenés*] *(Col.* VII 35). Pero un viejo profesor de matemáticas, al que pintan celoso de su rigor y su pureza, puede tener achaques de impaciencia como los referidos en esas dos anécdotas más edificantes que ciertas. Bien: sea así, si así os parece.

Los polígrafos árabes imaginaron leyendas más audaces: Euclides había sido hijo de Naucrates, nieto de Zenarco —y tal vez de Berenice—; había nacido en Tiro y residido en Damasco, pero sin renegar de su linaje y sus hábitos griegos; por lo demás, en los *Elementos* no había hecho

sino refundir el trabajo anterior de un tal Apolonio, carpintero por más señas (Casiri, *Bibliotheca Arabico-Hispana Esculiarensis* I 339).

La hora de los malentendidos llegó, en fin, con los comentadores y los editores postmedievales y renacentistas. Algunos dieron al autor de los *Elementos* la falsa identidad de Euclides de Mégara, un filósofo socrático coetáneo de Platón; la confusión, tal vez nacida de Valerio Máximo *(Sobre dichos y hechos memorables* VIII 12) en tiempos de Tiberio, se generalizó a través de las ediciones impresas de los *Elementos* entre 1482 y 1566, hasta ser disipada por Commandino (1572) y por Clavio (1574). Otra especie común en el siglo XVI fue considerar únicamente los enunciados de problemas y teoremas como propios de Euclides, mientras se adjudicaban las pruebas —la *expositio* o el *commentum* de estas proposiciones— a Teón, el editor alejandrino de los *Elementos* en el siglo IV. Este desmembramiento del cuerpo de los *Elementos* prosperó con ediciones influyentes, como la de Zamberti (bajo el elocuente título: *Euclidis megarensis philosophi... elementorum libros XIII cum expositione Theonis insignis mathematici,* Venecia, 1505) o la de Lefèvre *(Euclidis Megarensis ... libri XV, Campani ... in eosdem commentariorum libri XV. Theonis ... in tredecim priores commentationum libri XIII,* París, 1516); al final, dio lugar a la impresión de manuales que sólo recogían los enunciados de las proposiciones euclídeas (e. g., Roma, 1545; París, 1557). Por otro lado, la adaptación escolar y la divulgación de una base geométrica y aritmética que la cultura de la época hacía necesaria, invitaban a una actitud análoga de selección: a entresacar de los *Elementos* ciertos principios, en particular definiciones, y determinadas proposiciones a cuyo enunciado seguían las pruebas más sumarias e intuitivas disponibles. De hecho,

amparándose en el valor cultural o en los servicios instructivos de la geometría (en nuestro país, por ejemplo, podían comprender desde «la educación de nobles» hasta «la fortificación militar»), no pocos tratados de matemática aplicada de los siglos XVII y XVIII seguirán practicando esta suerte de selección o despojo de Euclides con premeditación y alevosía.

Por lo demás, la neblina que envuelve a nuestro personaje sigue dando que hablar en nuestros días. Hay quien ha imaginado que la única salida a la incertidumbre creada por su cronología imprecisa y por la índole un tanto heterogénea de los *Elementos*, es plantear una especie de «cuestión euclídea». ¿No serán «Euclides» un nombre colectivo y los *Elementos* obra de una escuela? [3] Imposible no es. Pero tampoco parece una salida razonable: no tiene la menor base documental y nos metería en dificultades mayores que las que pretende salvar.

2. *Obras*

Euclides escribió por lo menos una decena de obras. Hoy disponemos de dos: los *Elementos* [Στοιχεῖα] y los *Datos* [Δεδομένα]. La segunda bien podría ser un texto auxiliar, complementario de la primera; tiene que ver con los libros I-VI y con la práctica del análisis geométrico como vía de resolución de problemas: en el supuesto de que ciertas partes de una figura estén dadas (por lo que se refiere a su magnitud, posición, etc.), muestra la manera de determinar otras partes de la figura en el mismo respecto. Tenemos recensiones de otras dos. Una es *Fenómenos*

[3] *Vid.* J. ITARD, *Les livres arithmétiques d'Euclid*, París, 1961, pág. 11; «Euclid», en *Encyclopaedia Universalis. Corpus*. 7, París, 1985, pág. 518. Cf. G. KAYAS, ed., *Euclide. Les Éléments*, París, 1978, Introd., págs. xi-xvi.

[Φαινόμενα], ampliamente comentada por Pappo (*Col.* VI 104-130); se trata de una obra de astronomía teórica compuesta sobre la base de la geometría esférica —cuyo estudio tenía menos arraigo tradicional que el de la geometría plana de los *Elementos*—; introduce una noción absoluta de horizonte frente al sentido relativo que antes había tenido *horídson* en Aristóteles y Autólico. La otra es *Óptica* [Ὀπτικά] (Pappo, *Col.* VI 80-103; Proclo, *Com.* 69, 2), un tratado acerca de la perspectiva y la visión directa —por oposición a la geometría de los rayos reflejados, la catóptrica, o de los rayos refractados, la dióptrica—, marginado seguramente por las mayores luces de la *Óptica* de Tolemeo (aparecida a mediados del siglo II); conservamos, con todo, una recensión del editor alejandrino Teón y otra versión anterior, editadas por Heiberg-Menge (*Euclidis opera omnia*, VII, 1895); formula por vez primera el principio de la propagación rectilínea de la luz. Para las demás obras de Euclides contamos con referencias más o menos cumplidas. De *Sobre divisiones de figuras* [Περὶ διαιρέσεων βιβλίον] (Proclo, *Com.* 69, 4) hay una versión árabe; la reconstrucción moderna de R. C. Archibald (1915) se beneficia también de una sección recogida en *Practica geometriae* de Leonardo de Pisa (1220). Pero no quedan restos de los *Porismas* [Πορίσματα] (Pappo, *Col.* VII 14; Proclo, *Com.* 301, 22-26); ésta ha sido una grave pérdida, pues allí Euclides abordaba al parecer cuestiones de matemática superior de un tipo y un alcance que hoy no estamos en condiciones de precisar [4]. *Sobre cónicas* debió de

[4] *Vid.* T. L. HEATH, ed., *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Londres, 1926², (reimp. Nueva York, 1956) 1, págs. 10-15. BULMER-THOMAS, art. cit., 1981, pág. 42, opina, como Heath, que esta obra podría haber sido el primer tratado sobre geometría proyectiva de que hubiera noticia. C. B. BOYER, *Historia de la matemática*, Madrid, 1986,

ser una obra en cuatro libros sobre las secciones cónicas de la que sólo indirectamente da noticia Pappo (*Col.* VII 30); Apolonio, en el prefacio del libro I de sus *Cónicas*, se limita a aludir al trabajo de Euclides en este campo sin mayores referencias; es posible que en tiempos de Pappo, entre finales del siglo III y principios del IV, ya se hubiera perdido sustituida por el gran tratado de Apolonio. Los dos libros de *Sobre superficies* [Τόποι πρὸς ἐπιφανείᾳ] (Pappo, *Col.* VII 3) estudiaban conos, cilindros, esferas y posiblemente otras construcciones sobre superficies de sólidos en revolución, tal vez en la línea desarrollada luego en *Sobre conoides y esferoides* de Arquímedes. Un tratado de paternidad euclídea harto dudosa discurriría sobre *Catóptrica* [Κατοπτρικά] (está mencionado en Proclo: *Com.* 69, 2); naturalmente se ocuparía de espejos; la compilación hoy conservada bajo este título se considera obra de Teón, nuestro activo y casi inevitable mediador con la obra de Euclides. Algo más fiables son los indicios de unos *Elementos de música* [Αἱ κατὰ μυσικὴν στοιχειώσεις] (Proclo, *Com.* 69, 3; Marino, prefacio de los *Comentarios sobre los Datos de Euclides*, recogidos en Heiberg-Menge, VIII 454, 19); pero la llamada *Sectio Canonis*, que ha solido endosarse al propio Euclides, no es al parecer sino un estudio de intervalos compuesto a partir de extractos de algún original euclídeo; y la otra parte que se suponía integrante de esos *Elementos*, una *Introducción a la armonía* [εισαγωγὴ ἁρμονική], hoy suele reconocerse como contribución de Cleónides, discípulo de Aristóxeno. Por último, Proclo (*Com.* 69, 27-70, 18) se hace eco de un escrito *Sobre paralogismos* [Ψευδάρια] que abundaba en casos y ejercicios prácticos dirigidos a formar y depurar el razonamiento

pág. 142, considera que podría haber representado una aproximación a un tipo de geometría analítica.

del alevín de matemático; Miguel de Éfeso, en sus comentarios a las *Refutaciones Sofísticas* de Aristóteles, lo titula *Pseudo-graphemata;* no llegó a ser conocido por los comentadores árabes de Euclides.

Las fuentes árabes atribuyen a Euclides algunos tratados mecánicos (*Sobre lo ligero y lo pesado* [Περὶ κούφων καὶ βαρέων], *Sobre la palanca* [Περὶ Ζυγοῦ]). Creo que lo más que cabe aventurar en este sentido es la posible existencia de una mecánica geométrica, inspirada en consideraciones ajenas a la dinámica de Aristóteles y anterior o, al menos, relativamente primitiva en comparación con la estática de Arquímedes. Dicho en otras palabras: *Sobre la palanca* podría ser quizás una muestra de que, ya antes de Arquímedes, la mecánica aristotélica no era la única posible. Pero las referencias de que disponemos sobre todo esto se limitan a ser compatibles con lo que hubiera podido hacer Euclides de haber hecho efectivamente algo al respecto [5].

3. *Los «Elementos»*

La fama de Euclides descansa, según es bien sabido, en la rara fortuna de su tratado de elementos matemáticos. «Los *Elementos* contienen una guía incontestable y perfecta de la exposición científica misma en materia de geometría», sentencia Proclo al final de su breve catálogo de las

[5] Para más detalles sobre las obras de Euclides, aparte de los *Elementos*, *vid.* la ed. capital de J. L. Heiberg - H. Menge, *Euclidis opera omnia*, Leipzig, 1883-1916, vols. VI-VIII. Hay referencias en la ed. cit. de Heath, 1926², I, págs. 7-18, así como en su *A History of Greek Mathematics*, Londres, 1921 (reimp. Nueva York, 1981), vol. I, págs. 421-446. También tienen interés las breves indicaciones de I. Bulmer-Thomas, art. cit., 1981, págs. 425-431.

obras euclídeas *(Com.* 70, 16-18). Este juicio resume la opinión del mundo cultural helenístico y, con ligeras modulaciones, se ha mantenido prácticamente vigente hasta bien avanzado el siglo XIX. Algunas opiniones modernas son incluso mucho más exageradas: Peyrard, en 1819, aún recuerda a propósito de esta obra: «M. Legendre ... me repetía a menudo que la geometría era una lengua muerta después de Euclides» (ed. cit. de J. Itard (1966), prefacio, pág. 1).

Los *Elementos,* en la presente versión, son un conjunto de 132 definiciones, 5 postulados, 5 nociones comunes o axiomas y unas 465 proposiciones distribuidas en 13 libros. Entre los comentadores árabes se extendió la creencia de que el tratado incluía además otros dos libros, el XIV y el XV, que venían a complementar el estudio de los sólidos regulares del libro XIII. Pero el supuesto libro XIV es seguramente obra de Hypsicles, un matemático alejandrino, quizás discípulo del propio Euclides. Y el presunto libro XV es un producto mucho más tardío y de inferior calidad aún que el anterior; hay quienes lo atribuyen a Damaskios (siglo VI), discípulo de Isidoro de Mileto —uno de los arquitectos de la Basílica de Santa Sofía—.

A pesar de su común identificación con la geometría, el tratado comprende diversos campos temáticos de la matemática elemental y emplea métodos variados. Entre esos cuerpos figuran la teoría de la geometría plana (libros I-IV) y la geometría del espacio (XI-XIII), la teoría generalizada de la proporción (V-VI), la teoría aritmética (VII-IX); el libro X es un tanto singular y, en sustancia, ofrece una conceptualización precisa de la inconmensurabilidad y una clasificación prolija de las variedades de rectas irracionales. Dentro de estas teorías, puede haber así mismo algunos núcleos de singular relieve, e.g., la concepción de las paralelas —en el marco de la geometría— o el estudio de los primos relativos —en el marco de la aritmética—. Por lo que concierne a los métodos utilizados, los más relevantes podrían ser el procedimiento elemental de construcción por «reglas y compás», el procedimiento de aplicación de áreas —conocido entre algunos intérpretes modernos por la denominación equívoca de «álgebra geométrica»—, y un proceder demostrativo fundado en el principio de continuidad (libro V, definición 4) y en el lema de bisección (libro X, Prop. 1) —que, a su vez, se ha visto tildado de «método de exhausción», por obra y gracia de la matemática renacentista—. Pero, por encima de todo, lo que tradicionalmente ha llamado más la atención de los comentadores y observadores *methodologically minded* es la portada «axiomática» de los *Elementos* —el conjunto de definiciones, postulados y nociones comunes—, con la que se abre el libro I y a la que se supone el pórtico de la gloria de la geometría euclídea.

Más adelante, volveremos sobre todos estos ingredientes teóricos y metódicos del contenido de los *Elementos.* Ahora no estará de más detenerse a considerar brevemente el lugar y el sentido de la composición de Euclides dentro de la antigua tradición matemática griega de este tipo de tratados.

II. Los «Elementos», una escritura que hizo historia

Los griegos fueron conscientes de la importancia que revestía la composición de *Elementos* matemáticos. «En geometría es bueno ejercitarse en lo que se refiere a los elementos», aseguraba Aristóteles *(Tópicos* VII 14, 163b23). Una razón puede ser la apuntada por Proclo *(Com.* 71,

9-12): si se cuenta con unos elementos de geometría, cabe entender el resto de esta ciencia, mientras que sin ellos no será posible comprender su complejidad y las demás partes resultarán inalcanzables. Esta consideración se extiende a las matemáticas en general. Según un testimonio del que se hace eco Herón *(Definiciones* 160, 8 ss.), los peripatéticos decían que la retórica, la poesía y la música popular eran accesibles y podían entenderse sin un curso de iniciación, pero nadie era capaz de adquirir conocimiento de las cosas que se denominaban «matemáticas», a menos que tuviera una instrucción específica; «y por este motivo —explica Herón— el estudio de tales materias fue llamado "matemática"» *(i.e. mathematiké,* término relacionado con el verbo *mantháno:* «aprender», «instruirse», «llegar a conocer»).

1. *La tradición de los tratados de elementos*

Los *Elementos* de Euclides coronan una tradición de tratados elementales hoy desaparecidos. A juzgar por el resumen historiográfico de Eudemo que nos facilita Proclo *(Com.* 65 ss.), Hipócrates de Quíos, hacia 470-400 a. C., fue el primero en componer un libro de elementos. Posteriormente, un tal León, algo mayor que Eudoxo y más joven que Platón, compuso otro prestando mayor atención al número de los elementos y a su empleo en las pruebas; también tiene interés anotar que se aplico a la investigación de diorismos [*diorismoí*], *i.e.* a la investigación de condiciones que determinan cuándo un problema es soluble o no. Teudio de Magnesia, en fin, confeccionó unos *Elementos* que mejoraban el orden deductivo de exposición y daban forma general a resultados que sólo habían tenido hasta entonces un alcance particular; fue seguramente un

manual con cierta circulación dentro de la academia platónica; algunas referencias matemáticas sumarias de los *Analíticos* de Aristóteles revelan por lo menos la familiaridad con un manual de este género. Proclo no menciona ningún otro tratado anterior a los *Elementos* de Euclides —aunque hace alusión a Hermótimo de Colofón, que continúa la línea de trabajo de Teeteto y Eudoxo, y es más joven que Euclides, como descubridor de «muchos de los elementos»—.

El término «elemento [*stoikheîon*]» podía emplearse con múltiples usos en diferentes contextos (gramatical, cosmológico, astronómico, matemático)[6]. Su equivocidad es manifiesta sin salir siquiera del contexto geométrico. Por un lado, recibían el nombre de *Elementos* las compilaciones que reunían ciertos conocimientos primordiales y básicos. Por otro lado, se llamaban «elementos» las proposiciones que desempeñaban un cometido capital en la obtención o en la organización deductiva de otros resultados (Proclo, *Com.* 72, 5-7). Según esto, los *Elementos* venían a ser tratados que exponían con mayor o menor acierto los «elementos» —en este último sentido— de algún dominio de las matemáticas. Pero también se distinguía, desde Menecmo (siglo IV a. C.) al menos, entre una significación más amplia y otra más restringida de estos «elementos», de estas proposiciones capitales. En un sentido genérico, todo cuanto sirve de medio para obtener o establecer alguna otra cosa puede considerarse «elemento» de tal resultado; así entendidos, son «elementos» los lemas asumidos, los teoremas demostrados y los problemas resueltos cuando se utilizan en la prueba de nuevos teoremas o en la

[6] *Vid.*, por ej., W. BURKERT, «Stoicheion. Eine semasiologische Studie», *Philologus* CIII (1959), 167-197.

solución de problemas ulteriores. Por ejemplo, en los *Elementos* de Euclides la construcción de un triángulo equilátero (libro I, Prop. 1) puede considerarse elemento de la obtención de una recta igual a otra recta dada (I, Prop. 2). En cambio, el título de «elemento» en un sentido propio y restringido se reserva para designar un grupo selecto de asunciones y proposiciones: las que tienen el estatuto de principios [*arkhaí*] dentro de una disciplina y constituyen la base de partida sobre la que se teje la trama deductiva de las demás proposiciones como un cuerpo más o menos sistemático de conocimientos. Esas proposiciones primordiales —definiciones, postulados— son así elementos, propiamente dichos, de los teoremas derivados de ellas. Proclo señala que este significado más estricto es el que mejor cuadra a los elementos compilados en el tratado de Euclides. Y después de Euclides, probablemente bajo su influjo, es el que prevalece en algunos otros tratados básicos o elementales [*stoikheióseis*] sobre otras ramas de la matemática.

De todo ello se desprende que la composición de *Elementos* era un empeño importante en varios aspectos, tanto teóricos y metodológicos como didácticos o disciplinarios. Pero no implicaba una estrategia única, uniforme, y por lo demás nada garantizaba en principio el éxito de la empresa o la significación del plan concebido: podía conducir a reducciones triviales o excesivamente limitadas de la materia objeto de estudio, podía descansar en unas asunciones primeras desprovistas de la calidad o de la capacidad de los auténticos principios —Aristóteles ya había reparado incidentalmente en que la captación [*noûs*] de los *arkhaí* peculiares de una ciencia no siempre estaba asegurada de antemano. En su larga digresión sobre la noción de *stoikheîa*, Proclo también advierte:

en todas las ciencias es difícil seleccionar los elementos y disponerlos en su debido orden... Y de quienes han abordado esta empresa, unos han sido capaces de compilar más proposiciones y otros menos; unos han dado pruebas muy sucintas y otros han dilatado su exposición con interminables minucias; algunos han evitado el empleo de la reducción al absurdo, otros han descartado el uso de las proporciones, otros han ideado unos preliminares dirigidos contra quienes desechan los principios; y, en suma, muy diferentes métodos han sido los inventados por los diversos autores de *Elementos* (*Com.* 73, 16-25).

A la luz de esto podemos apreciar la excelencia del tratado de Euclides sobre los demás tratados, anteriores o posteriores, de este género. Contamos con razones de dos tipos para acreditarla: unas parecen ser más bien de carácter disciplinario o didáctico, hacen referencia a las virtudes expositivas e instructivas de la composición euclídea; las otras son más bien de carácter metodológico y guardan relación con la sistematización deductiva de las teorías o cuerpos de conocimiento que contiene. Tanto unas como otras son criterios coligados y aducidos por el mismo Proclo —aunque seguramente la distinción que he apuntado apenas fuera significativa en el medio helénico que da origen a esta suerte de tratados [7]—. De los valores metodológicos, Proclo deja constancia en un pasaje donde trata de

[7] Puede que los griegos no advirtieran tanta diferencia como nosotros entre un tipo y otro de criterios. PLATÓN ya aludía al «logos que se escribe con la ciencia en la mente del que aprende y es capaz de defenderse a sí mismo» (*Fedro* 276a); más aún, según ARISTÓTELES, los silogismos didácticos [*didaskalikoí*] de los *Tópicos* no son otros que los demostrativos [*apodeiktikoí*] de los *Analíticos*, vid. *Refutaciones sofísticas* 2 165b1-4 y 8-9. En lo sucesivo y por lo regular, mencionaré los títulos de Aristóteles por sus abreviaturas habituales, e. g., *SE* (*Refutaciones sofísticas*), *APr.* (*Primeros Analíticos*), *APo.* (*Segundos Analíticos*), etc.

resumir las virtudes que realzan los *Elementos* euclídeos (*Com.* 69, 4 ss.). La primera es el acierto y la discriminación que gobiernan la selección de los teoremas y problemas considerados, pues Euclides «no ha incluido todo lo que podría haber dicho sino sólo lo pertinente para la construcción de los elementos». La segunda virtud es la riqueza de métodos empleados:

Ha utilizado toda suerte de deducciones concluyentes, unas que obtienen su fuerza de los principios mismos, otras que se derivan de pruebas demostrativas, pero todas ellas incontestables, precisas y congruentes con el conocimiento científico. A mayor abundamiento se ha servido de todos los métodos dialécticos...;

por si esto fuera poco, «hace un uso hábil y certero de diversas formas de conversión geométrica». La tercera y última virtud mencionada por Proclo guarda una relación más estrecha con la sistematización deductiva: consiste en la continuidad de las pruebas y, más especialmente, en el hecho de proceder conforme al orden de consecuencia debido.

Los valores didácticos o disciplinarios aparecen en el contexto antes citado de la digresión en torno a la noción de elementos y la confección de tratados elementales.

Un tratado así —asegura Proclo— ha de verse libre de todo cuanto sea superfluo, pues eso obstaculiza el aprendizaje; debe cribar todo lo comprendido por el objeto de estudio de forma coherente y conducente al fin propuesto, en orden a ser de mayor utilidad para el conocimiento; ha de poner sumo cuidado tanto en la claridad como en la concisión, pues lo contrario entorpece la comprensión; debe proponerse la formulación de los teoremas en términos generales, pues parcelar la instrucción de la materia en casos particulares dificulta la consecución del conocimiento. De acuerdo con todos estos criterios —concluye nuestro comentador—, el sistema de los elementos de Euclides supera a los demás (*Com.* 73, 26-74, 11).

Esta significación didáctica y disciplinaria del tratado de Euclides reaparece entre los objetivos que Proclo atribuye expresamente al propio autor (*Com.* 70, 19 ss.). Los propósitos de Euclides al componer los *Elementos* han sido, según nuestro comentarista del libro I, dos: uno hace referencia al objeto de la investigación; el otro se refiere justamente al valor instructivo del tratado.

Por lo que toca al primero, Proclo, en su vena platonizante habitual, supone que la geometría globalmente considerada tiene que ver con las figuras «cósmicas», con los cinco sólidos regulares de que trata el libro XIII, y asegura que el propósito final de la contribución de Euclides es precisamente la construcción de estos poliedros, sumamente importantes para una cosmología platónica. La verdad es que el tratado, aunque se cierre con el broche de estas figuras tendenciosamente llamadas «cósmicas» o «platónicas», no deja entrever ninguna intención de Euclides en tal sentido. El silencio de Euclides sobre todo cuanto se refiera a un propósito filosófico o, en general, extramatemático de su tratado, es denso y tan perceptible como el fervor neoplatónico de Proclo y de otros muchos comentadores helenísticos. Si, por nuestra parte, llevados de una pasión hermenéutica similar, nos empeñáramos en extraer o identificar «una filosofía» a partir de ciertas asunciones u orientaciones implícitas en esos textos matemáticos clásicos, nos encontraríamos con posiciones irremediablemente equívocas. En concreto, la presunta «filosofía de la matemática» de los *Elementos* nos podría recordar alguna vez a Platón, otras veces a Aristóteles, pero sus cauces de pensamiento —digamos— son generalmente los abiertos por

la tradición matemática más antigua (en el caso de la geometría plana y de la aritmética) o más moderna (en el caso de la teoría de la proporción y del estudio de rectas racionales e irracionales) —tradiciones también conocidas por Platón y Aristóteles de modo que en ocasiones no es fácil distinguir las voces de los ecos—. En general, ni antes ni después del divino Platón, los motivos filosóficos que no venían tamizados por el desarrollo relativamente autónomo de la tradición matemática misma, alcanzaron a tener un influjo crucial o decisivo sobre el curso teórico o sistemático de la geometría griega [8]. Por otro lado, si bien es

[8] Ni siquiera es perceptible un efecto directo de los problemas de la infinitud y del continuo suscitados por la dialéctica eleática y por la discusión cosmológica posterior. *Vid.* W. R. KNORR, «Infinity and continuity: the interaction of mathematics and philosophy in antiquity», en N. KRETZMANN, ed., *Infinity and Continuity in Ancient and Medieval Thought*, Ithaca, Nueva Jersey, 1982, págs. 112-145. Cabe apreciar algún eco de las aporías cosmológicas en algunas nociones explicitadas por Euclides en la cabecera «axiomática» de los *Elementos*, vid., e. g., V. VITA, «L'infinito matematico in Aristotele e nel suo tempo», *Boll. di Storia delle Scienze Matematiche* VI - 2 (1986), 109-132. Pero no hay indicios de que tales aporías filosóficas o dialécticas determinaran o cuestionaran el curso de la geometría de modo parecido a como influyeron en ciertas posiciones filosóficas acerca de la matemática o en el curso de la propia filosofía natural; antes bien, las nociones y proposiciones geométricas solían considerarse como un fondo de datos o resultados disponibles en orden a la resolución de ciertos problemas cosmológicos, *vid.*, por ej., ARISTÓTELES, *Física* VI 2, 233a32-b15. También es errónea, amén de simplista, la interpretación de los *Elementos* sugerida por Popper: se habrían concebido justamente como respuesta a *un* problema y tal problema no habría sido sino de orden *cosmológico* (*vid.* K. R. POPPER, «The cosmological origins of Euclidean geometry», en I. LAKATOS, ed., *Problems in the Philosophy of Mathematics*, Amsterdam, 1967, págs. 18-20). En L. VEGA, *La trama de la demostración (Los griegos y la razón tejedora de pruebas)*, Madrid, 1990, I, §§ 2-4, se discuten diversos aspectos críticos de esa presunta influencia dialéctica o filosófica sobre el desarrollo

cierto que la geometría euclídea se hace eco de —al mismo tiempo que facilita— diversas aplicaciones (astronómicas, armónicas, ópticas, geográficas), ninguna de ellas merece un excurso o una mención siquiera en los *Elementos*.

En cambio, el segundo objetivo —relativo al aprendizaje de la disciplina de la geometría—, aunque tampoco tiene una mención expresa en el tratado, resulta francamente visible: consiste, dice Proclo, en «perfeccionar la intelección del conjunto de la geometría por parte del estudiante». Se echa de ver, sin ir más lejos, en el interés tanto teórico como práctico de las pruebas euclídeas: Euclides se interesa no sólo por demostrar que algo es el caso (que la figura tal o cual tiene tales o cuales propiedades), sino por demostrar cómo se pueden obtener este y otros tipos de resultados (e.g., en I, 1-26; I, 45; II, 14; IV, 2-16); el antiguo profesor alejandrino no sólo enseña una ciencia, sino que, en cierto modo, parece empeñado en enseñar a aprenderla y construirla (y, para colmo de felicidad, sin el menor alarde de pedagogía).

2. *El lugar del tratado de Euclides en la tradición de «Elementos»*

Para tener mayores luces sobre la significación histórica de la contribución de Euclides, conviene volver a su dimensión metodológica y recordar en esta perspectiva la distinción entre el sentido amplio o genérico y el sentido estricto de «elemento».

de las matemáticas. En fin, sobre el interés de Proclo en presentar a Euclides como un platónico convencido, *vid.* D. J. O'MEARA, *Pythagoras revived. Mathematics and Philosophy in Late Antiquity*, Oxford, 1989, págs. 170-176 en particular.

Supongamos un armazón deductivo de la forma siguiente:

$$\langle A_1, A_2 \ldots \rightarrow \langle P_j \rightarrow P_k \rightarrow \ldots \rightarrow Q_n \rangle \rangle,$$

donde las proposiciones de tipo A son principios o asertos primordiales en un campo de conocimiento, las proposiciones de tipo P son teoremas o resultados conocidos, y la proposición de tipo Q es la conclusión que se acaba de obtener; la flecha '→' señala el orden de deducción.

En la medida en que P_j, P_k ... funcionan como lemas o pasos deductivos que llevan a la obtención de Q_n, cumplen la función de elementos en sentido amplio o genérico. Ahora bien, si P_j, P_k ... han sido a su vez derivados o probados a partir de unos primeros principios A_1, A_2 ..., podemos decir que también hay elementos en el otro sentido, más propio y restringido: pero éstos no son las proposiciones de tipo P, sino las de tipo A, de las que así mismo se deriva indirectamente, a través de P_j, P_k ..., el último resultado, Q_n. En el primer caso, cuando nos atenemos al fragmento $\langle P_j, P_k \ldots \rightarrow Q_n \rangle$ y tomamos P_j, P_k ... como puntos de partida para la obtención de Q_n —al margen de si tienen o no el carácter de pasos intermedios, derivables de unas proposiciones básicas del tipo A—, nos movemos en el estrecho ámbito de un «núcleo» deductivo. En el segundo caso, en cambio, designamos ciertas proposiciones A_1, A_2 ... como puntos absolutamente iniciales de ésta o de cualquier otra cadena deductiva vinculable a ellas y, así, damos una disposición «axiomatiforme» a un cuerpo de conocimientos o de proposiciones: pasamos a movernos en el ámbito de una «teoría» deductiva.

Los dos casos evidencian el proceder eslabonado de la deducción, la transitividad de los encadenamientos deductivos (si vale una deducción '$\alpha \rightarrow \beta$' y otra '$\beta \rightarrow \gamma$', vale así mismo la deducción '$\alpha \rightarrow \gamma$'), y su capacidad para ir acumulando nuevos resultados Q_n, Q_{n+1} ... sobre la base de los ya conocidos. Pero el segundo caso, la introducción expresa de unos primeros principios A_1, A_2 ..., nos permite subsumir el núcleo particular $\langle P_j, P_k \ldots \rightarrow Q_n \rangle$ o cualquier otro fragmento parecido dentro de un contexto mucho más comprensivo y nos autoriza a armar este contexto como un cuerpo sistemático de conocimientos. En el marco de una ciencia deductiva, en matemáticas, un tratado de *elementos* en el primer sentido cobra visos de ser una organización parcial o un ensayo provisional cuando es contemplado en la perspectiva de una sistematización más cabal y comprensiva como la representada por un tratado de *elementos* en el sentido segundo, más estricto. He ahí, a los ojos de Proclo y de otros comentadores antiguos, uno de los motivos de la excelencia metódica del tratado de Euclides dentro de la tradición de los *Elementos* de geometría. Por lo que hoy sabemos, el de Euclides es el primer tratado que distingue expresamente un conjunto determinado de primeros principios, con un alcance general en este área de conocimiento, y el único que los subdistingue en definiciones [*hóroi*], postulados [*aitémata*] y nociones comunes [*koinaì énnoiai*].

Actualmente también nos tienta la conversión de esta clave metodológica en una clave de interpretación histórica: así, podríamos ver el desarrollo de la tradición de los *Elementos* como una línea de sistematización progresiva desde sus inicios con Hipócrates hasta su culminación en Euclides. Por regla general no debemos caer en tentaciones de este tipo: la historia es mucho menos simple y lineal que nuestras metodologías, y nuestras reconstrucciones racionales del progreso científico suelen producir bellas his-

torias, relatos edificantes, antes que una historia verosímil. Sin embargo, en el presente caso, no es inverosímil una evolución de este signo: desde unos *Elementos* que más bien consistían en principios instrumentales, asunciones capaces de aglutinar un núcleo de resultados o de proposiciones conocidas en torno a una cuestión determinada, hasta unos *Elementos* fundados en principios axiomatiformes, asunciones capaces de tejer un cuerpo de conocimientos como una teoría deductiva. Desde luego, la desaparición de los tratados anteriores al de Euclides impide pronunciarse sobre esta conjetura con pruebas documentales; nos contentaremos con indicios.

Los primeros *Elementos* se remontan a Hipócrates de Quíos. De este Hipócrates apenas sabemos algo. Por un lado, según Proclo *(Com.* 212, 24-213, 11), fue el primero en reparar en que el problema de la duplicación del cubo era reducible al problema de hallar dos medias proporcionales en proporción continua (tal vez guiado por una analogía con el problema más sencillo de la duplicación del cuadrado, para cuya solución bastaba hallar una media propocional [9]). Por otro lado, Simplicio *(Comentarios a la Física de Aristóteles* 60, 22-68, 32), refundiendo al parecer un extracto de la *Historia* de Eudemo, recoge la solución de Hipócrates al problema de la cuadratura de la lúnula: es el fragmento de cierta entidad más antiguo que nos ha

[9] De creer a Platón, en su tiempo podían resolver este problema hasta los esclavos que no habían recibido la menor instrucción en geometría con tal de que fueran griegos o hablaran griego —esto al menos pretende demostrar *Menón* 82b-85b—. Así pues, no tendrán las bendiciones de Platón quienes excluyan de un *curriculum* la opción matemáticas + griego, como combinación disparatada, o mantengan el hábito de las dos (in)culturas: ciencias/letras *(—Graeca sunt? Non leguntur. —Mathematica? Non intelliguntur).*

llegado de los matemáticos griegos y muestra con cierto detalle el proceder deductivo de Hipócrates en la solución de este problema. Tanto la reducción seguida en el primer caso como el procedimiento analítico de prueba adoptado en el segundo caso, permiten sospechar que el método empleado por Hipócrates se atiene a la pauta siguiente:

El punto de partida es una proposición que sienta un conocimiento capital o un resultado primordial para la cuestión planteada —en el fragmento citado se trata de la proposición: los segmentos semejantes de círculos guardan entre sí la misma razón que los cuadrados de sus bases—. Esta proposición se reduce o prueba por referencia a otra más simple y general —a saber: los cuadrados de los diámetros guardan entre sí la misma razón que sus círculos respectivos—, que, a su vez, pasa a ser probada o establecida —remitiéndose a que la razón que guardan los círculos entre sí es la misma que la que tienen sus segmentos, pues los segmentos que son semejantes comprenden las mismas partes en sus círculos respectivos—. Por último, se distinguen los diversos casos comprendidos por el problema (e.g.: la cuadratura de una lúnula cuya circunferencia exterior sea igual, mayor o menor que un semicírculo) y se procede a resolverlos sobre la base de la proposición de partida; es interesante advertir que algunos de los casos examinados requieren la consideración de «diorismos», condiciones determinantes de su solución efectiva. En suma: Hipócrates se ocupa ante todo de resolver problemas; los trata de forma retroductiva (retrotrayendo la prueba de unas proposiciones iniciales a la prueba de otras más básicas), de un modo similar al que más adelante se denominará «método de análisis» y se supondrá característico de la investigación geométrica griega; a este fin selecciona las proposiciones pertinentes no en calidad de principios geo-

métricos generales, sino en función de las condiciones y supuestos oportunos para el problema particular que debe resolver. El aspecto general de esta trama no es otro que el de un «núcleo» deductivo. Este procedimiento también resulta afín al señalado por Platón en *Menón* 86e-87a, cuando recomienda el proceder «a partir de hipótesis [*ex hypothéseos*]» que siguen los geómetras: aquí una hipótesis viene a representar un medio de prueba en el sentido de constituir un supuesto o una condición a los que se retrotrae la solubilidad de la cuestión considerada.

Si unimos estos cabos sueltos, nos inclinaremos a pensar que los *Elementos* atribuidos a Hipócrates respondían más bien al sentido amplio o genérico de *stoikheîa* y a su empleo como principios instrumentales, como proposiciones capitales dentro de núcleos deductivos ordenados a la solución de problemas. En la misma línea cabría situar los *Elementos* de León, habida cuenta de que León también es recordado por su contribución al descubrimiento de «diorismos, cuya finalidad es determinar cuándo el problema investigado es susceptible de solución y cuándo no» (Proclo, *Com.* 67, 1-2). Ahí se detienen nuestras pistas y nada podemos decir sobre la índole del tratado de Teudio. Pero Platón, en la *República,* da a entender que el método de hipótesis de los geómetras ya no sólo consiste en la heurística *analítica* de problemas, sino que ha iniciado una conversión *sintética* hacia la deducción de teoremas: la geometría ha empezado a instituir ciertas aserciones como principios de los que ya no cabe dar razón ni considerar posibles alternativas, pues los geómetras los toman como si fueran obvios para cualquiera y, partiendo de ellos, deducen el resto hasta concluir en el objeto final de la prueba. Esta inmovilización axiomatiforme descalifica ahora, a los ojos de Platón, el conocimiento discursivo de los geómetras frente al método dialéctico del filósofo que continúa ascendiendo en pos de otros principios superiores hasta la idea suprema de Bien *(República* VI 510c-511b, VII 533c). Aristóteles será así mismo testigo de las ambigüedades de la situación: declara que son elementos «las proposiciones geométricas cuyas demostraciones están contenidas en las pruebas de otras proposiciones, de todas o de la mayoría» *(Metafís.* B 3, 998a25-26) y que «las demostraciones primeras e implícitas en otras demostraciones se llaman elementos» *(ibid.* Δ 3, 1014a35-b2). Un postrer testimonio de esta época de transición podría ser la distinción misma de Menecmo entre los dos sentidos, el amplio o genérico y el restringido, del término *elemento* en geometría.

Todavía cabe añadir a estos indicios algunas pistas procedentes de otra tradición ambigua: la de los problemas y teoremas. Un problema representaba ante todo un objeto geométrico (e.g., la construcción de una figura) a hacer. Un teorema era, en cambio, una proposición a establecer acerca de alguna característica —propiedad, relación— esencial de objetos matemáticos construidos o dados. (En esta línea cabe recordar que el primer teorema de los *Elementos,* la proposición I, 4, viene a continuación de la prueba de tres problemas previos.) Proclo glosa además otra diferencia metodológica de interés *(Com.* 79, 12-80, 16): en la solución de problemas se puede contar con la lógica relativamente abierta de ciertas condiciones de posibilidad; pero en la demostración de teoremas sólo cuenta la lógica estricta de la necesidad o de la imposibilidad, capaz de sentar conclusiones absolutas y generales. Esta diversificación tiene que ver con ciertos motivos internos (conceptuales, teóricos) de desarrollo del rigor de la prueba deductiva en matemáticas —motivos relacionados sobre todo con el estudio de las magnitudes inconmensurables y con el tra-

bajo sobre el concepto de proporción—; por otra parte, confirma la congruencia de la solución de problemas con los medios reductivos y heurísticos del *análisis* geométrico, y la afinidad de la prueba de teoremas con la sistematización deductiva de la *síntesis*. El «mecánico» Carpo, recordado por Proclo, apuntaba además que al vérselas con un problema cabía acudir a una vía relativamente eficaz de descubrimiento de la solución —el análisis— sin que, por el contrario, se conociera ningún método heurístico general que se aplicara con igual fortuna a los teoremas. Todos éstos son aspectos en los que no puedo entrar aquí [10]. Baste mencionar, por último, el hecho de que esta doble orientación de la investigación en geometría había conducido a controversias acerca de la índole de las proposiciones geométricas dentro del círculo platónico o entre gente más o menos relacionada con la Academia: Espeusipo y Anfínomo defendían su calidad de teoremas, pues no en vano versaban sobre objetos eternos de una ciencia teórica, contemplativa; en cambio, Menecmo vindicaba su condición primigenia de problemas. Lo cierto, en cualquier caso, es que los ecos de esa diversificación y de esta polémica apenas se dejan notar en la sistematización deductiva uniforme

[10] *Vid.* P. Tannery, *La géométrie grecque. 1ère Partie: Histoire de la géométrie élémentaire*, París, 1887, Hildesheim-Zurich-Nueva York, (reimp. 1988); G. A. Allman, *Greek Geometry from Thales to Euclid*, (reimp. 1976); G. Cambiano, «Il metodo ipotetico e la origine della sistemazione euclidea della geometria», *Rivista di Filosofia* 58 (1967), 115-149; W. R. Knorr, *The Evolution...*, op. cit., 1975; *The Ancient Tradition of Geometric Problems*, Boston, 1986; L. Vega, *La trama de la demostración...*, op. cit., 1990, I, § 3; IV, § 1. En el ya citado I. Thomas, ed., *Selections of Greek Mathematics*, 1939, 1967³, pueden verse textos y testimonios al respecto; de esta compilación han partido las versiones y comentarios, a veces un tanto *sui generis*, de J. D. García-Bacca, *Textos clásicos para la historia de las ciencias*, I, Caracas, 1961.

de los *Elementos* de Euclides. Tanto los problemas como los teoremas se presentan como proposiciones con un patrón de prueba común en el tratado euclídeo [11].

La consideración de este patrón general de las pruebas de Euclides muestra otro aspecto del papel normalizador que desempeñan sus *Elementos*. Si su disposición axiomatiforme marca la norma de exposición de una disciplina deductiva como la geometría, el tipo de prueba seguido se convierte parcialmente en el canon a seguir por toda demostración geométrica digna de tal nombre. Proclo, una vez más, puede servir de guía en este terreno; en el contexto de su larga glosa de la proposición 1 del libro I, señala una especie de pauta general de prueba de las proposiciones de los *Elementos* (*Com.* 203, 1 ss.). Cuando Euclides la sigue de modo cabal —e.g., en el caso citado I, 1—, comprende los pasos:

a) Enunciado [*prótasis*]: proposición del objeto a construir si se trata de un problema, o del aserto a establecer si se trata de un teorema; su formulación perfecta declara por una parte lo que está o se considera dado y, por otra

[11] No obstante, cabría reparar en cierta afinidad entre la prueba de los problemas y el uso de los postulados, así como entre la demostración de los teoremas y el uso de las definiciones. Pero su significación no se puede exagerar (por ejemplo, en la línea de una relación entre los postulados y las cuestiones de «existencia» matemática como la sugerida por H. G. Zeuthen, «Die geometrische Construction als "Existenzbeweis" in der antiken Mathematik», *Mathematische Annalen* 47 (1896), 222-228; cf. W. R. Knorr: «Construction as existence proof in ancient Geometry», *Ancient Philosophy* 3 (1983), 125-148. Por lo demás, la distinción entre los problemas y los teoremas tampoco representa una distribución cabal del conjunto de las proposiciones de los *Elementos:* hay proposiciones que envuelven rasgos característicos de ambas «categorías» y las hay que parecen discurrir con independencia de una y otra.

parte, lo que se busca probar —siempre en términos generales—.

b) Exposición [*ékthesis*]: presentación de lo dado o introducción de un caso determinado de aplicación del enunciado mediante la cláusula «sea...» y el uso de letras como abreviaturas que designan los elementos del caso (puntos, líneas, figuras, magnitudes, números).

c) Determinación ó delimitación [*diorismós*]: especificación del objeto de la prueba por referencia al caso expuesto; en los problemas se concreta la tarea con la fórmula; «lo que se requiere es...», en los teoremas se concreta la aserción con la fórmula «digo que...». Por *diorismós* también se entiende a veces —como ya sabemos— una delimitación en el sentido más preciso de fijar las condiciones de posibilidad de la prueba: si lo buscado es imposible o es posible y, entonces, cómo se puede conseguir efectivamente; cuando tiene este significado de condición o límite de la prueba, suele seguir inmediatamente a la *prótasis* a manera de apéndice del enunciado del problema *(vid.* e. g., I, 22).

d) Preparación [*kataskeué*]: urdimbre o disposición de construcciones y relaciones, a partir de lo dado y en orden a la obtención del resultado propuesto.

e) Demostración [*apódeixis*]: proceso demostrativo propiamente dicho que consiste en la derivación de consecuencias sobre la base de los conocimientos previos, ya sean proposiciones primordiales (definiciones, postulados, nociones comunes), ya sean proposiciones sentadas en pruebas anteriores.

f) Conclusión [*sympérasma*]: aserción de que se ha satisfecho el *diorismós* en el caso de un problema o reiteración de la *prótasis* en el caso de un teorema como confirmación de que el objeto de la prueba ha sido establecido.

Viene marcada indefectiblemente por una partícula consecutiva fuerte ('por consiguiente [*ára*]'). La conclusión de los problemas se remata con la cláusula final: «que era lo que había que hacer [*hóper édei poiésai*]»; la de los teoremas, con la fórmula: «que era lo que había que demostrar [*hóper édei deîxai*]».

Proclo reconoce que no siempre se dan todos estos pasos en las pruebas de los *Elementos*, pero llama la atención sobre tres que, a su juicio, nunca han de faltar: a) el enunciado, b) la demostración, c) la conclusión. «Porque es igualmente necesario conocer de antemano el objeto de la prueba, demostrarlo por los medios debidos y concluir lo que se ha probado» *(Com.* 203, 17-19).

Hay indicios de que antes de Euclides ya existía en medios matemáticos un patrón tradicional de prueba parecido al que consagran los *Elementos*. Aparte de ciertas huellas incidentales que se traslucen en el lenguaje metasilogístico que Aristóteles emplea en algunos pasajes de los *Primeros Analíticos* (e. g., I 5, 27a2-14), esas semejanzas pueden vislumbrarse en la práctica seguida por Autólico en los primeros tratados matemáticos completos que hoy se conservan *(Sobre la esfera en movimiento, Sobre ortos y ocasos)*. El procedimiento tradicional seguía los pasos de la enunciación, una especie de fusión de la exposición o *ékthesis* con la preparación, y finalmente la demostración [12]. Así

[12] También serán luego destacados por los traductores medievales de los *Elementos (vid.* más adelante, IV, § 3.2 B). En realidad, este proceder (enunciado, construcción sobre un caso particular cualquiera, prueba) y su trasfondo inferencial intuitivo (referido a un diagrama o un caso-muestra) podrían considerarse típicos de la práctica matemática más común a lo largo de la historia. No estaría de más replantear a esta luz las discusiones y contraposiciones habituales, en punto a rigor, entre esta especie de «ingeniería de la prueba» que suele practicar la gente cuando hace

a) La composición euclídea fue, para empezar, un repertorio básico de los resultados probados y las proposiciones demostradas; un archivo tan cumplido que hizo superfluo cualquier otro tratado matemático del mismo alcance y género, y devino una referencia común en las investigaciones subsiguientes: siempre que hacía falta un lema elemental bastaba, por lo regular, mencionar su presencia en los *Elementos* sin que fuera preciso detenerse a probarlo. Los *Elementos* eran fuente de autoridad: cualquier asunción hecha en su nombre quedaba por ello mismo autorizada. Hay raras excepciones, e. g., la independencia de Arquímedes o incluso su renuencia a citar a Euclides, que parecen confirmar la regla [13]. Este papel singular, por otro lado, facilita el crecimiento normal de la geometría por adiciones sucesivas que a partir de esta base pueden ir completando lo que falta —esta forma de progreso de una disciplina, *epídosis*, era la prevista ya por Aristóteles en la *Ética Nicomáquea* I 7, 1098a23-25—. El largo rosario de comentarios y escolios de los *Elementos* es buena muestra de la existencia de un desarrollo parecido.

b) Los *Elementos* fijaron una especie de estándar metodológico o nivel básico de exigencia tanto en lo referente a la sistematización deductiva de un cuerpo de conocimientos como en lo referente al rigor informal de la prueba matemática. También representaron, por otro lado, una

[13] Sobre las curiosas relaciones entre Arquímedes y los *Elementos* de Euclides, *vid.* W. R. Knorr, «Archimedes and the *Elements:* Proposal for a revised chronological ordering of the Archimedian Corpus», *Archive for the History of Exact Sciences* XIX (1978), 211-290; cf. algunas acotaciones críticas oportunas en T. Sato, «A reconstruction of *The Method* Proposition 17 and the development of Archimedes' thought on quadratura», *Historia scientiarum* 31 (1986), 61-86, y 32 (1987), 75-142.

normalización de la exposición demostrativa de las proposiciones geométricas. Estos dos aspectos de lo que luego se llamaría *ars disserendi,* el metodológico o sistemático y el disciplinario o expositivo (solidarios, como ya he sugerido, en la tradición griega de los *Elementos),* determinaron, mediante su ejemplar materialización en el tratado de Euclides, la instauración alejandrina de la geometría como la disciplina matemática —*i.e.* demostrativa— por excelencia. Más aún: fuera del dominio matemático, los *Elementos* también ejercieron de modelo de la ciencia sistemática y precisa, según muestran los deseos expresos de Galeno de incorporar esa estructuración deductiva a la teoría médica con el fin de liberarla de disquisiciones filosóficas y discusiones dialécticas. Ni que decir tiene que la proyección general de los *Elementos* como directriz regulativa, arquetipo de ciencia rigurosa e incontrovertible, es más bien programática o corre a veces el riesgo de resultar prematura, cuando no de volverse contraproducente [14].

c) La impronta institucional de los *Elementos* se echa de ver, en fin, no sólo en sus repercusiones metódicas y disciplinarias, sino en consecuencias de otro género, más sustantivas. Influyeron decisivamente en ciertas formas de

[14] En la misma *Ética Nicomáquea* —a continuación del pasaje antes citado—, Aristóteles había advertido: «Pero ... no hemos de buscar del mismo modo el rigor en todas las cuestiones, sino, en cada una según la materia que subyazga a ella y en el grado pertinente para la investigación particular en curso» (1098a25-28). G. E. R. Lloyd ha llamado la atención sobre los efectos perniciosos de esta proyección axiomatiforme tanto para el desarrollo de la propia matemática como para otros desarrollos científicos fuera de ese ámbito; *vid.* «Greek notions and practice of proof», 1987, incluido en su *Demystifying Mentalities* (Cambridge, 1990, c. 3, págs. 87-90 en particular). Proclo, sin embargo, todavía intentará dar visos de respetabilidad a su teología neoplatónica por medio de una *stoikheíosis* «axiomática».

conceptualización científica de su tiempo, especialmente las deudoras de la geometría. Aunque esta orientación geométrica ya viniera avalada por algunas tradiciones preeuclídeas, los *Elementos* marcaron un hito decisivo en la geometrización de las matemáticas y de sus dominios de aplicación (desde la astronomía o la estática hasta la geografía). También sancionaron la suerte de otras tradiciones marginales (la proporción numérica, el cálculo logístico) [15].

Con todo y con esto, las indicaciones anteriores no quieren dar a entender en absoluto que la matemática griega, desde el siglo III a. C. en adelante, sólo sea un conjunto de notas a pie de página de los *Elementos*. De hecho, el tratado aparece sobre un transfondo cultural de discusiones y tradiciones dispares que militarán en contra de su implantación dogmática y absoluta. Según recuerda Proclo *(Com.* 199, 3-14), son varios los autores helenísticos que oponen objeciones a la geometría y, en particular, a la sistematización euclídea. La mayor parte de ellos alimentan dudas sobre los principios y tratan de mostrar que las proposiciones derivadas resultan infundadas: unos, como los escépticos, porque no admiten los principios ni, en general, la existencia de una ciencia demostrativa; otros, como los epicúreos, porque discrepan de ciertos principios geométricos. Pero también hay quienes, reconociendo los principios, niegan que sus consecuencias se hallen demostradas a menos que se añadan o declaren otros supuestos no explicitados en los *Elementos;* entre éstos últimos, quizás se halle algún filósofo (e. g., el epicúreo Zenón de Sidón, al que responde Posidonio en defensa de Euclides), pero su actitud parece ser típica de los comentadores y editores más o menos matemáticos del tratado. Todas estas noticias y otras ocasionales, incluso las procedentes de una fuente crítica tan puntillosa como Sexto Empírico, no son demasiado precisas; desde luego, no documentan ni avalan en absoluto la presunción de una especie de geometría rival de los *Elementos,* una geometría —digamos— «no euclídea» [16]. Pero son elocuentes: hacen ver que el estatuto pri-

[15] A pesar de algunos estudios recientes, e.g. de D. H. FOWLER, la suerte de estas tradiciones marginales, tanto antes como después de Euclides (en Herón, en Diofanto), sigue sin recibir la atención que merece. Por lo demás, es obvio que la rara fortuna institucional de los *Elementos* de Euclides no se debe únicamente a sus características propias o a sus virtudes internas. También contribuyeron otras circunstancias de muy diverso orden, cuya consideración nos llevaría ahora demasiado lejos. *Vid.*, por ej., G. GIANNANTONI, «Su alcuni problemi circa i rapporti tra scienza e filosofia nell'età ellenistica», en G. GIANNANTONI y M. VEGETTI, eds., *La scienza ellenistica,* Nápoles, 1984, págs. 41-71; M. VEGETTI: «La scienza ellenistica», ibid., págs. 431-470; G. CAMBIANO, «La démonstration géométrique», en M. DETIENNE, dir., *Les savoirs de l'écriture en Grèce ancienne,* París, 1988, págs. 251-272; L. VEGA, *La trama de la demostración...,* op. cit., IV, § 4.

[16] Aparte de las referencias de Proclo, tenemos noticias de una oposición frontal a la geometría deductiva en general, en particular a la euclídea, por parte de algunos filósofos escépticos y también quizás epicúreos; en el primer caso, contamos con las objeciones de Sexto Empírico en *Pròs Mathematikoús* III; en el segundo caso, no es tan fácil identificar al crítico o el alcance de la crítica (cf., por ejemplo, la discutida *Carta a Heródoto* de EPICURO, §§ 56-59, trad. en C. GARCÍA GUAL, *Epicuro,* Madrid, 1981, págs. 98-99). Pero en ambos casos se plantean por lo regular cuestiones conceptuales y filosóficas (e. g., dificultades relacionadas con las nociones de punto, línea, superficie, sólido, con la idea de divisibilidad...), antes que cuestiones técnicas. *Vid.* M. GIGANTE, *Scetticismo e epicureismo,* Nápoles, 1981, págs. 209-214 en especial; I. MUELLER, «Geometry and scepticism», en J. BARNES y otros, *Science and Speculation. Studies in Hellenistic Theory and Practice,* Cambridge-París, 1982, págs. 69-95. De la filosofía epicúrea precisamente se ha querido extraer una especie de geometría «no euclídea», una alternativa atomista que descartaría la bisecabilidad o divisibilidad indefinida de los *Elementos*

vilegiado de los *Elementos* no cierra la discusión o acaba con las discrepancias, ni siquiera en el seno de la tradición

(e. g.: I, 10; X, 1); *vid.* e. g., H. Von Arnim, «Epikurs Lehre vom Minimum», *Almanach der Kaiserlichen Akad. der Wissenschaften*, Viena, 1907, págs. 383-399; S. Luria, «Die Infinitesimaltheorie der antiken Atomisten», *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik* 2 (1933), 106-172. Pero los que luego han abrigado esta presunción, como J. Mau, terminan por reconocer que no está documentada, *vid.* su «Was there a special Epicurean mathematics?», *Phronesis*, Sup. 1 (1979), 421-430; también es instructiva la crítica de G. Vlastos: «Minimal parts in Epicurean atomism», *Isis* 56 (1965), 121-147, y «Zeno of Sidon as a critic of Euclid», en L. Wallach, ed., *The Classical Tradition*, Ithaca, Nueva Jersey, 1966, págs. 148-159. La asunción de indivisibles tiene, desde luego, una larga tradición en el pensamiento griego y, según Proclo, *Com.* 279, 5, Jenócrates, discípulo de Platón, ya se había encargado de introducirla en matemáticas; pero no hay constancia de que se produjera una geometría atomista peculiar y rival de la establecida.

Otra suerte de geometría «no euclídea» es la que se ha querido adivinar en algunas referencias de Aristóteles a la teoría de las paralelas; por ejemplo, en *APo.* II 17, 66a13-15, para mostrar que una conclusión falsa puede seguirse de premisas diferentes aduce este caso: la intersección de dos líneas paralelas podría seguirse bien de la hipótesis de que el ángulo interno es mayor que el externo del mismo lado, bien de la hipótesis de que la suma de los ángulos del triángulo vale más de dos rectos (esas hipótesis niegan respectivamente las proposiciones I, 27, y I, 28, dos teoremas característicos de la teoría euclídea de las paralelas). A juicio de un intérprete como I. Tóth, «Das Parallelenproblem in Corpus Aristotelicum», *Archive for History of Exact Sciences* 3 (1967), 249-322, ésta y otras alusiones por el estilo significan la existencia de geometrías basadas en la negación de la teoría de las paralelas de los *Elementos*, antes del propio Euclides. Pero los textos aducidos y sus contextos quedan lejos de apoyar una interpretación tan aventurada. Cf. el detenido examen crítico de G. J. Kayas, «Aristote et les géométries non-euclidiennes avant et après Euclide», *Revue des Questions Scientifiques* 147 (1976), 175-194, 281-301, 475-465. Por lo demás, los matemáticos griegos conocían resultados de este tipo en geometría esférica, resultados que tomaban no como una alternativa sino como un desarrollo parejo al de la geometría euclídea, trazado a imagen y semejanza de los *Elementos*. Así:

matemática, sobre puntos particulares —alguno tan capital como la identificación de las nociones comunes necesarias y suficientes, o como la índole de un postulado—; hacen ver que esa consagración tampoco descarta el empleo de otras definiciones alternativas o la revisión crítica de varias pruebas euclídeas. Por ejemplo, Apolonio parece arrogarse el derecho de probar alguna de las nociones comunes, supuestamente indemostrables; Herón sólo admite tres nociones comunes, corrige demostraciones y evita el uso de la reducción al absurdo; Pappo explicita axiomas suplementarios y otros supuestos implícitos en las definiciones; Teón, el editor principal de los *Elementos*, añade alguna demostración de propia cosecha; el mismo Proclo se suma a la tradición, presidida quizás por Tolemeo, de los que intentan probar como teorema el postulado euclídeo de las paralelas. La verdad es que ni la matemática de más estricta observancia euclídea se privó del placer de agregar lemas y puntualizaciones a Euclides. Así pues, los *Elementos*, a pesar de la transfiguración institucional que les sobreviene, no dejan de ser una obra estimulante dentro de una tradición viva. Constituyen una fuente de glosas y comentarios a la vez que conviven con otras formas de hacer

las proposiciones 10 y 11 del tratado *Perì sphaíras* de Menelao —astrónomo alejandrino de finales del siglo I— establecen que la suma de los ángulos de un triángulo esférico excede de dos rectos, y este exceso es proporcional al área; pues bien, el tratado está compuesto por analogía con la geometría plana de Euclides, y ni a Menelao ni a ningún autor antiguo conocido (incluidos los comentadores árabes que traducen el tratado de Menelao y están interesados en la teoría de las paralelas, como Nasir al-Din al-Tūsī) se les ocurre pensar en algo parecido a una «geometría alternativa». Sobre esta tradición geométrica esférica, puede verse B. A. Rosenfeld, *A History of Non-Euclidean Geometry. Evolution of the Concept of a Geometric Space*, Nueva York-Berlín-Heidelberg, 1988; cap. 1, págs. 1-22 en particular.

matemáticas, e. g., con la construcción geométrica por medio de la *neusis* —la interposición de una recta que se inclina hacia un punto dado y podría suponer el uso de una especie de regla marcada móvil— o por medios que se decían «mecánicos»; con el cálculo numérico, «logístico»; con ciertas primicias algebraicas como la avanzadas por Diofanto. Por consiguiente, hay que distinguir entre, por un lado, la significación metodológica y disciplinaria que el tratado de Euclides pudo adquirir en el medio helenístico y, por otro lado, la escolarización que luego hubo de padecer al transformarse en el manual de geometría por excelencia.

Es cierto que esta normalización escolar ya se insinúa en la edición [*ékdosis*] estándar de los *Elementos* que hace Teón de Alejandría en el siglo IV. Pero no se torna claramente perceptible hasta su conversión, primero árabe y después escolástica, en una especie de libro de texto susceptible de simplificación a la medida de los usos que la geometría alcanzaba a tener en una y otra cultura —usos al principio mucho menores, y más triviales por cierto, en la cristiana—. Luego asistimos a una suerte de bifurcación. Por una parte, esta misma condición escolar es la que prevalece en muchos usos del texto desde el Renacimiento e, incluso, se va acentuando hasta finales del siglo pasado cuando la ascensión del cálculo y del álgebra termina por desalojar los *Elementos* de su posición hegemónica en la enseñanza media y universitaria de Francia y del Reino Unido. Pero, por otra parte, sobre todo en medios filosóficos sensibles al desarrollo de la ciencia moderna, los *Elementos* continúan ejerciendo un papel de paradigma del rigor informal y de la demostración geométrica. Así: bajo el lema del «more geometrico» o del «esprit de la géométrie» del siglo XVII, Euclides se convierte en el epónimo no tanto

de una disciplina matemática como de un método de axiomatización. Algunos escolásticos tardíos ya se habían aplicado en París o en Padua a examinar la peculiar lógica deductiva de la prueba euclídea. Sin embargo, es a partir de los programas «racionalistas» del siglo XVII (alentados por Descartes, Pascal, Leibniz) cuando adquiere pleno sentido esta observación de Brunschvicg: «Euclides, para las numerosas generaciones que se han nutrido de su sustancia, puede que haya sido menos un profesor de geometría que un profesor de lógica» *(Les étapes de la philosophie mathématique,* París, 1947², § 49, pág. 84).

De ahí no se sigue que los *Elementos* sean el acta inaugural del método axiomático clásico de los siglo XVII-XIX, aunque sí constituyen una especie de preludio y ofician como un tópicc casi obligado de referencia. Más adelante volveré sobre este punto, donde conviene hacer otra distinción de importancia: entre la «axiomatización» euclídea, i.e. la trama deductiva de los *Elementos,* y la axiomatización «euclidiana», i.e. el método axiomático desarrollado en los tiempos modernos por diversas contribuciones a la geometría clásica.

La fortuna institucional de los *Elementos* puede inducir también a otro malentendido que conviene despejar: consiste en creer que forman un tratado homogéneo y compacto, tan autosuficiente y clausurado en sí mismo que ha borrado todo rastro de las tradiciones matemáticas anteriores. La ausencia de *Elementos* preuclídeos favorece esta impresión, pero sólo puede ser una impresión aparente y superficial. Más justo es concluir que lejos de condenar todas esas tradiciones a la extinción, la síntesis de Euclides contribuyó en cierto modo a la supervivencia y a la integración de algunas de ellas. Como Knorr ha apuntado *(The Evolution of Euclidean Elements,* op. cit., 1975, pág. 312),

lo deseable sería que las otras ramas de la matemática griega —la aritmética, en particular— hubieran encontrado compiladores de una inteligencia y de una capacidad semejante a las mostradas por Euclides es el caso de la geometría. Por lo demás, la composición de los *Elementos* tampoco es la de una obra marmórea, esculpida en un solo bloque y perfectamente acabada. Si la contemplamos en una visión global y panorámica, nos recuerda más bien una vieja catedral en cuya construcción, aunque esté presidida por un plan arquitectónico deliberadamente sistemático e integrador, se han estremezclado ya desde un principio materiales procedentes de diversas épocas y formaciones teóricas con distinto grado de desarrollo, a todo lo cual más tarde —a partir de los comentadores alejandrinos y de manos de sus sucesivos editores— se han ido añadiendo ciertos arreglos e, incluso, alguna que otra restauración moderna. Para no quedarnos en una simple impresión, veamos ahora de cerca la constitución interna de los *Elementos*.

III. La constitución de los «Elementos»

1. *El «pórtico axiomático»*

El libro I empieza sin el menor miramiento con una serie de definiciones [*hóroi*] como las siguientes:

1. Un punto es lo que no tiene partes.
2. Una línea es longitud sin anchura.
3. Los extremos de una línea son puntos.
4. Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.
5. Una superficie es lo que sólo tiene longitud y anchura. <...>

15. Un círculo es una figura plana comprendida por una línea tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto interior son iguales entre sí.
16. Y el punto se llama centro del círculo. <...>
23. Son rectas paralelas las que estando en el mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de los dos sentidos.

Aristóteles ya había recogido antiguas nociones del punto como «unidad con posición» (*Metafís.* Δ 7, 1016b26) y «extremo de una línea» (*Tópicos* VI 4, 141b21). Además, había precisado que el punto es algo sustancialmente indivisible y provisto de posición, pero no es parte de la línea ni la línea se compone de puntos —aunque, por movimiento, un punto pueda generar una línea y resultar así origen de una magnitud—. El punto se asemeja al *ahora*, instante indivisible que no forma parte del tiempo y se limita a marcar el comienzo, el final o una división en el tiempo (*Fís.* IV 11, 22a1-21). El paradigma de esta concepción de las unidades de magnitud sería la idea de unidad que transmite la def. 1 del libro VII, donde Euclides sienta la bases tradicionales de la aritmética: «la unidad es aquello en virtud de lo cual cada una de las cosas que hay es una». Esta noción puede haber surgido como una respuesta filosófica a las aporías y problemas suscitados por la amenaza eleática de una divisibilidad infinita, según se desprende de algunas referencias de Platón (e. g., *Rep.* VII 524e-566a) y del propio Aristóteles, aunque tampoco es una idea extraña a la tradición pitagórica. Euclides se hace eco de esta noción, pero no emplea la denominación usual del punto en contextos filosóficos, *stigmé* (punción, marca producida por un objeto puntiagudo), sino el término *semeîon* (signo, señal convencional) que, aun estando presente ya en

el contexto matemático, con Euclides deviene característico de este contexto hasta que los comentadores vuelven al uso indiscriminado de *stigmé* y *semeîon* para referirse al punto. Las definiciones 2 y 5 muestran, con mayor claridad aún, la conformidad de Euclides con nociones y formulaciones anteriores. Se mueven dentro del marco general que Aristóteles evoca en la *Metafísica:* «lo completamente indivisible según la cantidad y carente de posición se llama *unidad*, y cuando es completamente indivisible con posición se llama *punto;* lo divisible de una sola manera se llama *línea;* lo divisible de dos maneras, *superficie*, y lo divisible de las tres maneras *cuerpo»* (Δ 7, 1016a24-28). Así se introducen las dimensiones. Pero este planteamiento y en particular las definiciones citadas 1-2, 5, merecen más atención por sus resonancias intuitivas que por su rendimiento geométrico —en otras palabras: son más útiles a Edwin A. Abbot para imaginar *Planilandia* que a Euclides para sistematizar los *Elementos*—. La Def. 3 relaciona los puntos con las líneas y su orden de aparición evita una objeción aristotélica contra una definición que introdujera el punto en estos mismos términos: si ésta fuera la definición inicial, equivaldría a explicar lo anterior (el punto) por lo posterior (la línea). La Def. 4 es probablemente original de Euclides: elabora una noción de línea recta a partir de su concepción como un rayo óptico o visual, familiar quizás en medios relacionados con la observación astronómica. La imagen subyacente podría ser la que Platón emplea en *Parménides* (137e): en una recta, el medio se interpone delante de uno y otro extremos de manera que eclipsa (encubre, impide ver) los extremos. Ésta no es la única imagen que los griegos se formaron de la línea recta. En todo caso, la versión de Euclides tiene un tono abstracto que soslaya cualquier referencia visual o concreta. La

Def. 15, en cambio, responde fielmente al criterio de equidistancia que Platón utiliza en el mismo pasaje del *Parménides* para determinar la noción de lo redondo o lo circular; Euclides añade la precisión de que el punto equidistante, el centro, es un punto interior, *i.e.* un punto que se encuentra en el mismo plano que el círculo. Al igual que la Def. 2, esta Def. 15 es estática, no es genética: no envuelve unas condiciones de movimiento y generación como las que había considerado una tradición anterior *(vid.* Aristóteles, *Acerca del alma* I 4, 409a4-6), o como las que luego supondrá Herón (e. g.: un círculo es la figura descrita cuando una línea recta, manteniéndose en el mismo plano, se mueve sobre uno de sus extremos tomado como punto fijo hasta retornar a su posición de partida. *Definiciones*, Def. 27). La Def. 23 declara una noción de paralela no ignorada por Aristóteles, quien conocía también ciertas implicaciones de la teoría de las paralelas, como la de que el ángulo interno formado por una transversal no es mayor que el externo del mismo lado, o la de que los ángulos de un triángulo suman dos ángulos rectos *(APr.* II 17, 66a11-15). Con todo, es significativa la opción de Euclides por un criterio primordial de no intersección, no encuentro, para definir las rectas paralelas, frente a otras caracterizaciones posibles, e. g.: la fundada en el criterio de equidistancia (preferido por Posidonio, Gémino, Simplicio), la derivada del criterio de igual dirección (tal vez sugerido por Filopón), o la asociada a una condición aristotélica de finitud (explotada más tarde por Proclo). De hecho, el criterio euclídeo de no intersección y su empleo efectivo a través de un postulado congruente —el (v), véase *infra*— no incurren en ciertas peticiones de principio, ya denunciadas por Aristóteles *(APr.* II 16, 65a4-5), y que no dejarán de reproducirse después de Euclides entre quienes tratan

de ofrecer una concepción más obvia o mejor fundada —aparentemente— que la propuesta en los *Elementos*.

Euclides presenta a continuación cinco postulados [*aitémata*]:

(i) el de trazar una línea de cualquier punto a cualquier punto;
(ii) el de prolongar una recta finita continuamente en línea recta;
(iii) el de describir un círculo con cualquier centro y distancia;
(iv) el de que todos los ángulos rectos son iguales entre sí;
(v) el de que de si una línea recta al caer sobre dos rectas hace los ángulos interiores de un mismo lado menores que dos ángulos rectos, entonces las dos rectas, si son prolongadas indefinidamente, se encontrarán por el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.

El postulado (i) demanda la construcción efectiva de la línea recta una vez conocida su definición. Por contra, la existencia o disponibilidad del punto se da por descontada. Euclides también omite la implicación de que la línea trazada entre dos puntos es única —si dos rectas coincidieran en los mismos extremos, coincidirían cabalmente en toda su longitud—, aunque luego venga a suponerla en la prueba de la proposición I, 4, que establece las condiciones de la igualdad entre triángulos. Varios editores corregirán luego esta omisión interpolando como un nuevo postulado o como otra noción común, una asunción equivalente: dos rectas no encierran un espacio. El postulado (ii) puede entenderse de modo parejo en el sentido de que un segmento rectilíneo sólo puede prolongarse de una única manera por cada extremo y, por ende, dos líneas rectas no podrán tener un segmento común. Una de las críticas del epicúreo Zenón de Sidón a Euclides fue precisamente la de no haber explicitado este supuesto en la prueba de I, 1; con mayor razón cabría denunciar su ausencia en la

prueba de I, 4; mucho más adelante, en la prueba de X, 1, aparecerá tal supuesto de modo expreso e inopinado. El post. (iii) es a la definición del círculo lo que el post. (i) era a la definición de la recta: demanda su construcción efectiva una vez que se cuenta con la noción correspondiente. Se ha pensado a menudo que este postulado, así como el (ii), envuelve la idea de un espacio continuo e infinito: al no indicarse restricción alguna del tamaño del círculo descrito, éste puede ser indefinidamente pequeño en un espacio continuo —con una distancia mínima entre los puntos contiguos— o puede ser indefinidamente grande, infinito; esta suposición de infinitud parece necesaria para establecer la verdad universal del teorema I, 16, cuya prueba es criticable en diversos aspectos [17]. Pero creo que resulta muy aventurado atribuir a Euclides la intención de fijar, con tales postulados, las propiedades definitorias o estructurales del espacio que hoy calificaríamos de «euclidiano». Euclides, según todos los visos, trabaja con objetos geométricos determinados (segmentos, figuras, etc.), no con la idea abstracta o formal de espacio que hoy nos es familiar. En todo caso, lo que sí hacen los postulados (i)-(iii) es sentar las bases operativas de un procedimiento de construcción «por regla y compás»: con la regla se trazan (o «se tiran [*ekbállontai*]») rectas, con el compás se describen círculos; el compás se colapsa cuando se levantan sus dos pies, de modo que no sirve para transportar segmentos; pero la solución de los problemas I, 1-3 muestra que este recurso es superfluo y que los postulados se bastan para trasladar segmentos determinados —esta suficiencia

[17] *Vid.* T. L. Heath, ed., *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, ed. cit., 1926², I, págs. 280-281; A. Dou, «Los paralogismos de Euclides y Saccheri en la teoría de las paralelas», *Revista de la Real Academia de Ciencias* 61 (1967), 155-174.

da un toque de elegancia al método euclídeo—. En los postulados (i)-(iii) se nota el peso de una tradición entrenada en el estudio de problemas geométricos. A Enópides, un matemático del siglo v a. C. algo mayor que su paisano Hipócrates de Quíos, se le atribuyen la investigación de dos problemas recogidos en los *Elementos* (I, 12, y I, 23), y su solución por medio de este procedimiento de regla y compás (Proclo, *Com.* 283, 7-10, y 333, 4 ss.). La contribución de Euclides bien pudo ser entonces la explicitación cabal de los supuestos de este antiguo método.

El planteamiento euclídeo reviste importancia por diversos motivos. Por una parte, es sintomático del proceder constructivo de Euclides en este ámbito de la geometría plana. Este proceder nos recuerda la directriz aristotélica (e. g., *APo.* I 10, 76a31-36) de que, en relación con determinados objetos, se han de asumir como principios la noción de lo que son y el hecho de que son o existen realmente, mientras que en otros casos cabe suponer su concepto, pero habrá que demostrar su realidad efectiva. Así, Euclides define, por ejemplo, la recta, el círculo, el triángulo equilátero, el cuadrado; postula la construcción de la recta y del círculo; prueba la construcción del triángulo equilátero (I, 1), del cuadrado (I, 46). Pero no deberíamos ver aquí un prurito aristotélico ni, menos aún, una clave para adivinar la noción de construcción o de «existencia matemática» propia de los *Elementos*. Pues Euclides también emplea otros medios de construcción de objetos geométricos que no están cubiertos ni por estos ni por otros postulados explícitos: uno es la generación de una figura plana o sólida mediante el movimiento de otra (e. g., la generación de una esfera por rotación completa de un semicírculo sobre su diámetro); otro es la producción de figuras planas pasando un plano a través de un sólido (según acontece con las secciones cónicas); tales procedimientos se fundan, si acaso, en una definición como la de esfera (XI, Def. 14) o la de cono (XI, Def. 18). Más aún, en el ámbito de las magnitudes en general del libro V o en el de la aritmética del libro VII, Euclides nunca se considera obligado a explicitar postulado alguno de «existencia». Hay, en fin, proposiciones que se dejan leer en términos que hoy diríamos «existenciales» (e. g., VII, 31: «todo número compuesto es medido por algún número primo»; IX, 20: «los números primos son más que cualquier multitud acotada de números primos»), cuya demostración discurre por reducción al absurdo y desde supuestos que no se podrían considerar «constructivos».

Por otra parte, en los postulados (i)-(iii) late una tradición consciente no sólo de la efectividad de un método elemental de construcción, sino de sus limitaciones. Según Pappo (*Col.* III 54-56; IV 270-272), los geómetras habían llegado a distinguir tres tipos de problemas: los *planos*, para cuya solución bastaban líneas rectas y círculos; los *sólidos*, que suponían el uso de secciones cónicas; los *lineales*, que pedían curvas más complicadas, como las «cuadratrices» de Hipias o las espirales de Arquímedes. Quizás llevara su tiempo reconocer que no todo problema de la geometría plana es un problema *plano*. Problemas como la bisección del ángulo, la duplicación del cuadrado, la trisección del ángulo, la duplicación del cubo, la cuadratura del círculo son problemas bien conocidos en la tradición matemática anterior a Euclides. Todos ellos pueden plantearse en geometría plana; pero sólo los dos primeros admiten una solución efectiva con el simple uso de unas figuras elementales (la recta, el círculo) y de las configuraciones compuestas por ella. Euclides ofrece un criterio de discriminación al respecto: sea A un problema planteado en

los términos de la geometría plana; A es un problema *plano* sólo si es efectivamente soluble por el procedimiento de regla y compás; luego, si A es un problema plano, A tiene una construcción efectiva sobre la base sentada en los *Elementos*. Puede que los matemáticos alejandrinos de estricta observancia euclídea trataran de imponer además una directriz de parsimonia en este sentido: si A es un problema de la geometría plana, ha de abordarse su solución con esos medios *elementales* antes de proceder de modo expeditivo a su solución por otros procedimientos más complicados (como las curvas empleadas en los problemas lineales) o de dudoso origen (como los recursos de carácter «mécanico»), cuyo uso no está sancionado por la práctica seguida en los *Elementos*.

El postulado (iv) parece pertenecer de entrada a una clase de asunciones diferentes de la compuesta por (i)-(iii). Proclo recuerda que Gémino situaba este aserto entre las nociones comunes o axiomas, pues no hace referencia a unas posibilidades de construcción, sino que establece una propiedad esencial de los ángulos rectos: la de ser una magnitud determinada capaz de representar un patrón invariable para medir los demás tipos de ángulos. Proclo añade por su cuenta y riesgo que no es un postulado en un sentido aristotélico; luego da a entender que posee un carácter axiomático; y por último parece estar bien dispuesto a ofrecer una prueba *(Com.* 188, 1 ss.). Lo cierto es que los mss. que se derivan de la edición de Teón suelen situarlo entre las nociones comunes. Su aplicación comporta la asunción de unas figuras invariables y esto significa, a nuestros ojos educados en la geometría moderna, estipular que el espacio en general es homogéneo; de ahí que este postulado (iv) se considere hoy equivalente a una caracterización axiomática del espacio en términos de uniformidad o isotropía. Pero Euclides, una vez más, parece estar pensando en una propiedad básica de un objeto geométrico antes que en una característica estructural del espacio de la geometría euclidiana.

El postulado (v) también resulta un tanto peculiar. Por una parte, se asemeja a los postulados operativos (i)-(iii) al demandar, aparentemente, la existencia de puntos de intersección o encuentro de rectas con rectas. Por otra parte, completa el criterio de paralelismo avanzado en la definición de rectas paralelas —y, quizás en consonancia con este sentido asociado a una definición, no faltarán editores de los *Elementos* en los siglos XVI y XVII que lo incluyan entre las nociones comunes—. En tercer lugar y sobre todo, no goza de la evidencia inmediata que aureola los demás principios geométricos. «Debe ser borrado por completo de la lista de los postulados porque se trata de un teorema henchido de dificultades, que Tolemeo se propuso resolver en un libro, y su demostración requiere varias definiciones y teoremas», afirma Proclo *(Com.* 191, 21 ss.); dos motivos para dudar de su condición primordial de postulado son: a) la existencia de asíntotas, líneas que se aproximan más y más a medida que se prolongan sin llegar a encontrarse —¿por qué no ocurre esto mismo en el caso de las líneas rectas?—, y b) la prueba en los *Elementos* de una proposición conversa de este postulado, I, 17: la suma de dos ángulos cualesquiera de un triángulo es menor que dos rectos —¿por qué hemos de suponer entonces que (v) es un postulado en vez de ser, como I, 17, un teorema?—.

La larga historia de los intentos fallidos de apear de su pedestal el postulado euclídeo de las paralelas es la más popular de todas cuantas se refieren al desarrollo de las matemáticas. Comprende intentos de deducción directa en

el cuerpo de la geometría plana y ensayos de demostración indirecta mediante la reducción al absurdo de proposiciones equivalentes a la negación del postulado. Los fracasos sucesivos han ido arrojando una serie de formulaciones parejas al asediado pero incólume postulado (v), es decir: han ido explicitando supuestos deductivamente equivalentes a este postulado en el seno de los *Elementos* o, más en general, en el marco de la geometría euclidiana. Esta historia es sumamente instructiva, no sólo por lo que toca a la suerte de la geometría clásica al desembocar en la existencia de otras geometrías no euclidianas, sino por la repercusión de este desenlace en la 2.ª mitad del siglo XIX. Sus secuelas se hicieron sentir tanto en la filosofía de la matemática y en la filosofía de la ciencia en general —e. g., al replantear las relaciones entre las construcciones geométricas y el mundo físico o el espacio natural—, como en la metodología de las ciencias deductivas en particular [18].

[18] La literatura generada por el largo proceso de discusión del postulado (v) y su desembocadura en las variantes hoy conocidas (geometrías neutrales, euclidianas, no euclidianas) ha sido tan abundante que al cumplirse la 1.ª década del presente siglo ya merecía un catálogo especializado como el de D. SOMMERVILLE, *Bibliography of Non-Euclidean Geometry*, Londres, 1911. Hay una selección de los textos que tejen esta historia en J. FAUVEL y J. GRAY, *The History of Mathematics. A Reader*, Londres-Basingstoke, 1987; § 6C, págs. 235-239, §§ 16A-16D, págs. 508-540. Si dejamos aparte las primeras escaramuzas helénicas en torno al postulado de las paralelas (*vid.* T. L. HEATH (1926²), ed. cit., I, págs. 202-208 especialmente), los momentos álgidos de su historia podrían considerarse éstos:

1.º) Viene marcado por los comentarios árabes que siguen empeñados en su deducción directa a partir de alguna otra proposición congruente con la teoría; *vid.* K. JAOUICHE, *La théorie des parallèles en pays d'Islam*, París, 1986.

2.º) Un período de reelaboración moderna de la teoría euclidiana de las paralelas desde Saccheri (1733), *vid.* la edic. de G. B. HALSTED, *G. Sacheri's Euclides Vindicatus*, Nueva York, 1986²; Saccheri toma una vía indirecta para establecer el postulado: éste se seguiría de su propia negación dentro de la geometría euclidiana, pues la adición de una proposición contradictoria con el postulado al resto de los axiomas o principios euclidianos arrojaría unos resultados completamente absurdos —a los ojos del vindicador—. La contribución principal de estas dos primeras fases es la explicitación de proposiciones equivalentes al postulado o derivadas de él.

3.º) El tercer momento corresponde a la formulación de las geometrías no euclidianas de Lobatchevski (1829-30), J. Bolyai (1832), B. Riemann (1854), que justamente parten de la negación o el abandono del postulado de las paralelas para obtener otras geometrías tan consistentes como lo pudiera ser la geometría euclidiana; *vid.* el estudio clásico de R. BONOLA (1912): *Geometrías no euclidianas*, Madrid, 1923 (aunque preferible a esta edición española es la inglesa de H. S. Carslaw: BONOLA, *Non-Euclidean Geometry*, Nueva York, 1955, al incluir como suplemento textos básicos de Lobatchevski y Bolyai). Las revisiones históricas más comprensibles son las de B. A. ROSENFELD, *A History of Non-Euclidean Geometry...*, op. cit., 1976, 1988, y J. C. PONT, *L'aventure des parallèles*, Berna, 1986; también tiene interés en este sentido J. GRAY, *Ideas of Space*, Oxford-Nueva York, 1989². Sobre ciertos puntos conexos o derivados, pueden verse P. PARRINI, *Fisica e geometria dall'Ottocento a oggi*, Turín, 1979, y R. J. TRUDEAU, *The Non-Euclidean Revolution*, Boston-Basilea-Stuttgart, 1987. Otros aspectos metodológicos aparecen en E. AGAZZI y D. PALADINO, *Le geometrie non euclidee ed i fondamenti della geometria*, Milán, 1978; P. FREGUGLIA, *Fondamenti storici della geometria*, Milán, 1982 (en particular, caps. 5-6, págs. 233-327).

El pórtico de los *Elementos* se remata con una selección de nociones comunes [*koinai énnoiai*] de este tenor:

(i*) Las cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.
(ii*) Si cosas iguales se añaden a cosas iguales, los totales son iguales.
(iii*) Si cosas iguales se sustraen de cosas iguales, los restos son iguales.
(iv*) Las cosas que coinciden entre sí, son iguales.
(v*) El todo es mayor que la parte.

Suele considerarse que (i*)-(iii*) no sólo provienen de una tradición fielmente seguida por Euclides, sino que cumplen a plena satisfacción las condiciones que el programa aristotélico de la ciencia demostrativa había impuesto en los *Segundos Analíticos* a los principios de este tipo, e. g., la de ser verdaderamente primordiales e incontestables, la de tener un alcance más general que el limitado por el campo temático de una ciencia determinada. La noción común (iii*) es, en concreto, la ilustración favorita de Aristóteles cuando se refiere a esta clase de principios indemostrables (*APo.* I 10, 76a41; 76b20; 11 77a31). Pero es posible que los matemáticos helenísticos tuvieran alguna diferencia al respecto: al menos, hay noticias de un intento de Apolonio de demostrar alguna de estas nociones comunes típicamente indemostrables (Proclo, *Com.* 194, 10 ss.). Puestos en el otro extremo, varios comentadores y editores de los *Elementos* fueron añadiendo luego a (i*)-(iii*) nuevos axiomas acerca de las relaciones de igualdad y desigualdad. En todo caso, las nociones comunes (i*)-(iii*) no plantean los problemas de autenticidad de las dos siguientes.

La noción común (iv*) representa un axioma de congruencia que no parece tener la generalidad de las anteriores. Herón, de hecho, no la reconoció como tal y Proclo la acepta alegando que ni se deben multiplicar excesivamente los axiomas innecesarios ni se deben reducir drásticamente al mínimo los axiomas imprescindibles (*Com.* 196, 15-21). Es posible que se trate de una interpolación temprana, con la intención de que la coincidencia intuitiva (o la congruencia geométrica) se viera como una aplicación de la igualdad y se beneficiara de las virtudes señaladas en (i*)-(iii*), la transitividad y la regularidad con respecto a la adición y la sustracción. Sea como fuere, su utilización en las proposiciones I, 4, o I, 8 de los *Elementos*

da a entender que responde al procedimiento tradicional de superposición de figuras por desplazamiento de una y su colocación sobre la otra. A juicio de Platón, este recurso era uno de los que descalificaban a los geómetras de su tiempo por contaminar el pensamiento geométrico con la manipulación y el movimiento de objetos, pero ni antes ni después de Euclides dejó de aplicarse. Se suponía tácticamente que el movimiento no deforma los objetos así tratados.

La noción común (v*) también se nos presenta en Proclo con la cara de un axioma legítimo y la cruz de un principio discutido —e. g., por Herón—. En la prueba de I, 6, Euclides ante dos triángulos determinados, arguye que si uno fuera igual al otro, «el menor <sería> igual al mayor; lo cual es imposible». Esta misma fórmula se encuentra en una obra —anterior a los *Elementos*— de Autólico: «pues igual es el segmento ΔH al segmento ΔZ, el menor al mayor, lo cual es imposible [*íse ára estìn he* ΔH *tê* ΔZ, *he elásson tê meídsoni, hóper estìn adynaton*]» (*Sobre la esfera en movimiento,* Prop. 3). Cabe pensar entonces, como conjetura Heath, que (v*) viene a ser una generalización de los casos de este tipo que adquiere el aspecto de una condición sobre la relación de magnitud entre un todo, o el total, y una cualquiera de sus partes. O se puede pensar, por el contrario, que la noción común precede a las aplicaciones particulares como la de I, 6, y responde más bien a una opción intuitiva por los conjuntos finitos que trata de sortear algunas paradojas eleáticas sobre el infinito, e. g., que el doble resulta igual a la mitad, como ocurre en el argumento del «estadio» de Zenón de Elea; esto es lo que se imagina Szabó. También es posible, en fin, recordar el uso euclídeo de las nociones de «mayor» y «menor» (por ejemplo, en la línea de las definiciones

11: «Un ángulo obtuso es un ángulo mayor que un ángulo recto», 12: «Un ángulo agudo es un ángulo menor que un ángulo recto»), y entender que el todo y una de sus partes se relacionan como figuras compuestas de modo que la mayor contiene a la menor como una parte propia (e. g., si de trata de ángulos, de modo que ambos comparten el vértice y uno de los lados) [19]. Por otra parte, cabe reconocer que la noción común (v*) cuadra perfectamente con el punto de vista finito que Euclides adopta en otras proposiciones primordiales —e. g., en la Def. 23 o en los postulados (ii) y (v), donde su idea de línea recta se contrae a la idea de un segmento rectilíneo con la capacidad de ser indefinidamente extensible—. Pero así mismo hay que lamentar que la selección de (v*), dentro del contexto de las relaciones de orden de magnitud —mayor/menor—, sea mucho menos afortunada que la de (i*)-(iii*) en el contexto de las relaciones de igualdad; por ejemplo, (v*) no facilita la expresión de la transitividad y de otras propiedades de un orden de magnitud. De hecho, como ya he sugerido, (i*)-(iii*) no dejaron de inspirar nuevos axiomas emparentados (e. g.: «si se añaden iguales a desiguales, los totales resultan desiguales», «si se sustraen iguales de desiguales, los totales resultan desiguales»); la noción común (v*), por el contrario, permaneció solitaria y absorta en su propia (y aparente) evidencia.

Esta visión sumaria de la portada axiomática de los *Elementos* nos permite adelantar algunas características generales de la composición de Euclides. En primer lugar, su compleja relación con la tradición matemática anterior (lc principios constituyen un lugar privilegiado para observar esta relación; recordemos, por ejemplo, la índole de varias de sus definiciones: explicitan o explican nociones de raigambre geométrica, en vez de constituir definiciones propiamente dichas —son en ciertos casos nociones tan simples y básicas que de suyo parecen indefinibles; pueden resultar a veces un tanto superfluas para la organización sistemática de los *Elementos*—). Desde este punto de vista, los principios euclídeos se pueden clasificar, creo, en tres tipos:

a) Las nociones o asunciones que han sido tomadas directamente del legado tradicional, e. g.: las definiciones 2, 5, 15; la noción común (iii*).

b) Las nociones o asunciones de importación indirecta, pues, al parecer, incluyen cierta elaboración o alguna precisión por parte de Euclides, e. g.: las definiciones 1, 3; los postulados (i)-(iii); las nociones comunes (iv*) y (v*).

c) Las nociones o asunciones originales —a lo que se me alcanza— del propio Euclides, dado que muestran una postura o un compromiso relativamente característicos, e. g.: las definiciones 4, 23; el postulado (v).

En segundo lugar, lo que hemos visto ya deja traslucir la naturaleza sustancialmente intuitiva de la «axiomatización» euclídea. Volvamos, por ejemplo, a la elucidación de los supuestos que obran en el método de la regla y el compás. No es una explicitación cabal; no es una reconstrucción suficiente para prescindir del sustrato intuitivo y del soporte diagramático sobre los que venía descansando la práctica tradicional de las pruebas geométricas. Se echa en falta, especialmente, un postulado de continuidad

[19] Cf. T. L. Heath, *infra*, ed. cit., 1926², I, pág. 232; A. Szabó, *The Beginnings...*, op. cit., 1978, págs. 291-298; R. J. Trudeau, *The Non-Euclidean...*, op. cit., 1987, págs. 35-36. Por lo demás, según L. Brunschvicg, no representaría sino un axioma de desigualdad en la línea de los añadidos a (i*-iii*) por los comentadores y editores euclídeos, *vid.*, *Les étapes de la philosophie mathématique*, París, 1947³, § 52, pág. 89.

que asegure la existencia de puntos de intersección de las figuras elementales, las rectas y los círculos. Euclides confía en poder contar con un punto siempre que lo necesite y donde le convenga. El postulado (v) permite disponer en cierto modo de puntos de intersección entre rectas. Pero nada se dice sobre los puntos de intersección de rectas con circunferencias o de circunferencias con circunferencias. Serán las configuraciones gráficas quienes se encarguen de proveerlos. Así pues, las representaciones diagramáticas siguen desempeñando un papel sustancial en la efectividad constructiva de los métodos elementales de solución de los problemas planos (en la prueba de I, 1, sin ir más lejos). Estos y otros signos inducen a pensar que la esmerada organización deductiva de los *Elementos* no deja de atenerse al estudio tradicional de objetos geométricos determinados. Guarda relación con una nueva perspectiva sobre la constitución de cuerpos de conocimiento y con la preocupación por una exposición coherente y ordenada de sus *elementos*, que procede desde las asunciones más básicas y las pruebas más simples hasta los resultados derivados y las pruebas más complejas. Pero todo esto poco tiene que ver con una presunta conciencia axiomática que empieza declarando el espacio geométrico de referencia, así como el conjunto de condiciones y operaciones que determinan los objetos posibles dentro de este universo, sus propiedades pertinentes y sus relaciones mutuas. Si tal impresión fuera correcta, los defectos de la «axiomatización» euclídea no se deberían tanto a unas imperfecciones más o menos eventuales —e. g., a la existencia de supuestos tácitos— como, sobre todo, a la falta de una perspectiva axiomática propiamente dicha. Para recabar más información sobre este y otros conceptos de la constitución de los *Elementos*, pasemos a considerar los cuerpos

temáticos desarrollados en los libros que componen el tratado.

2. *Teoría elemental de la geometría plana. (Libros I-IV)*

El libro I contiene, además de las definiciones, postulados y nociones comunes que hemos visto, 48 proposiciones de las que 14 son problemas y 34 son teoremas. Las proposiciones I, 1-26 versan principalmente sobre triángulos; representan una especie de entrenamiento en el método de la regla (no marcada) y del compás (colapsable). Las proposiciones I, 27-32 desarrollan la teoría euclídea de las paralelas: I, 32 establece precisamente que la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a dos rectos. Pero antes de I, 27, donde se recurre por vez primera al postulado (v), ya se han dado pasos en esta dirección: I, 12 sienta la posibilidad de trazar una perpendicular a una recta dada desde un punto exterior a ella; I, 16 dice que, en todo triángulo, si se prolonga (infinitamente) uno de los lados, el ángulo exterior será mayor que cualquiera de los ángulos internos y opuestos; I, 17 dice que, en todo triángulo, la suma de dos ángulos cualesquiera es menor que dos rectos. De todo esto resulta la unicidad de la perpendicular: por un punto exterior a una recta sólo cabe trazar una perpendicular a ella —es un corolario explicitado por Proclo—. Este camino conduce a una versión popular del propio postulado (v): por un punto exterior a una recta sólo cabe trazar una paralela —sobre el supuesto de la prolongabilidad infinita que ya estaba involucrado en I, 16—. I, 28 expone uno de los criterios derivados del paralelismo euclídeo: si una recta al caer sobre dos rectas hace los ángulos interiores del mismo lado iguales a dos rectos, dichas

rectas serán paralelas. I, 29 da un criterio converso: si una recta cae sobre dos rectas paralelas, hace los ángulos interiores del mismo lado iguales a dos rectos.

Las proposiciones restantes se aplican a la determinación de áreas de paralelogramos, triángulos y cuadrados; preparan una métrica de la geometría plana que culmina en los resultados I, 45; I, 47-48 y II, 14. Importa señalar que en I, 35, donde se establecen las condiciones de igualdad entre paralelogramos, los *Elementos* introducen subrepticiamente una noción nueva de igualdad. Hasta entonces, la igualdad se venía entendiendo como coincidencia de formas y de figuras, como *congruencia geométrica*. A partir del I, 35, también se entenderá como igualdad de contenido o áreas, como *equivalencia geométrica*. En I, 44 («Aplicar a una recta dada, en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a un triángulo dado»), Euclides empieza a emplear el procedimiento geométrico de aplicación y transformación de áreas. Era un recurso antiguo; según Eudemo, citado por Proclo (*Com.* 419, 15-16), se debía a la Musa de los pitagóricos. I, 45 prueba la construcción de un paralelogramo equivalente al área de una figura rectilínea dada y establece así la posibilidad de representar cualquier área rectilínea como un rectángulo. Más adelante, en II, 14, sentará esta misma posibilidad para el otro tipo de paralelogramo que se consideraba básico, el cuadrado. I, 47 prepara el camino mostrando la expresión de la suma de dos cuadrados como un cuadrado. I, 47 es justamente una versión elemental del celebrado «teorema de Pitágoras» —resultado no exclusivamente original del padre de la secta pitagórica, ni seguramente demostrado por él como un teorema estricto—. La prueba de esta versión, a todas luces propia de Euclides, discurre al margen de la teoría de la proporción y del recurso a la semejanza de

triángulos. El carácter elemental de I, 47 y su converso, I, 48, convierte ambos teoremas en un broche de oro del libro I desde un punto de vista disciplinario; son una viva muestra de la capacidad de Euclides para dominar por medios relativamente sencillos buena parte de la tradición geométrica antigua. Desde el punto de vista teórico tienen menos importancia en la medida en que la teoría de la proporción del libro V permite establecer otra versión del teorema de alcance más general (V, 31); pero esto mismo también contribuye a hacer significativa la opción de Euclides, en el contexto del libro I, por un desarrollo inicial y sistemático en los términos elementales de la aplicación y transformación de áreas. El libro I, en su conjunto, es uno de los más logrados tanto en la perspectiva «axiomatiforme» de su organización deductiva, como en la perspectiva disciplinaria de una introducción progresiva en los métodos elementales de la geometría plana. Revela además la capacidad de Euclides para reconstruir de modo sistemático un legado antiguo y forjar nuevas pruebas que se adecuen a esta reconstrucción.

El libro II consta de 14 proposiciones, 2 de ellas problemas y las otras 12 teoremas. En realidad, parece recoger un núcleo formado por antiguos problemas aunque sean tratados a modo de teoremas, y esto da al libro un aire de miscelánea dirigida a ilustrar el uso y alcance del desarrollo elemental del método de aplicación de áreas. Por ejemplo, II, 11 da una solución necesaria para la inscripción de un pentágono regular en un círculo —operación que no tendrá lugar hasta IV, 10-11), y es un problema parejo al de cortar un segmento en razón media y extrema, cuestión que habrá de resolverse en el marco de la teoría de la proporción (VI, 30). II, 12 y 13 suplementan I, 47, y completan la teoría de las relaciones entre los cuadrados

de los lados de cualquier triángulo, sean rectangulares o no. II, 14, la construcción de un cuadrado equivalente a una figura rectilínea dada, es una especie de culminación del método elemental de la aplicación de áreas. Por lo demás, de esta antigua tradición de la aplicación de áreas Apolonio toma prestados algunos términos empleados en su investigación de las secciones cónicas [*parabolé:* «aplicación» / «parábola»; *hyperbolé:* «exceso» / «hipérbola»; *éleipsis:* «defecto» / «elipse»], aunque las diferencias conceptuales entre uno y otro campo sean notorias.

La aplicación de áreas suele recibir en nuestro tiempo —a partir de H. G. Zeuthen (1886): *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*— la denominación de «álgebra geométrica» de los griegos. Un rectángulo corresponde al producto de dos cantidades en álgebra, de modo que en la aplicación a una recta dada de un rectángulo o de un cuadrado equivalentes a un área determinada podemos ver la contrapartida geométrica de la división algebraica de un producto de dos cantidades por una tercera. La adición y sustracción de productos se traduce así mismo en la adición o sustracción de rectángulos o cuadrados. La extracción de una raíz cuadrada se vierte, en fin, por el hallazgo de un cuadrado equivalente a un rectángulo dado, *i. e.* por lo logrado en II, 14 con la ayuda de I, 47. En suma, cabe leer varios resultados de II en términos algebraicos (véanse más adelante estas versiones en las notas correspondientes a este libro). Con todo, la denominación de «álgebra geométrica» no deja de ser bastante ambigua y harto problemática. De hecho, ha significado tesis diversas entre las que destacan dos: 1) la tesis *histórica* de que el «álgebra geométrica» de los griegos es una geometrización de los métodos algebraicos practicados por la matemática prehelénica, en particular babilonia; 2) la tesis *hermenéutica* de que el «álgebra geométrica» consiste en una geometría algebraica, cuyas magnitudes (líneas, áreas) representan cantidades cualesquiera y cuyos teoremas traslucen relaciones o estructuras algebraicas[20].

La tesis histórica (1) puede tener distinto alcance según el grado de influencia que se atribuya a los precedentes babilonios, y según se considere el caso de la tradición geométrica griega en general o ciertos casos particulares como el de Herón de Alejandría. Herón emplea un procedimiento que se diría «algebraico» en las pruebas de II, 2-10 como consecuencias de II, 1: sus pruebas no requieren el uso de figuras, sino simplemente el trazo de una línea y, por

[20] Esta tesis 2) procede de H. G. ZEUTHEN, *Die Lehre von den Kegelschnitten in Altertum* (Copenhague, 1896) y luego se ha mantenido como en estado de solución en algunas historias notables de las matemáticas *(vid.,* por ejemplo, B. L. VAN DER WAERDEN (1950, 1954^2), *Science Awakening,* Nueva York, 1963). La tesis 1) se debe a una sostenida línea de investigación de O. NEUGEBAUER: desde su clásico «Zur geometrischen Algebra» *(Quellen und Studien zur Geschichte der Mathem., Astron. u. Phys.,* Abt. B 3 (1936), 245-259), hasta revisiones como «The survival of Babylonian methods in the exact sciences of Antiquity and the Middle Ages», *Proc. Amer. Philos. Society* 107 (1963), 528-535. La discusión se ha reavivado posteriormente merced a la intervención crítica de S. UNGURU, «On the need to rewrite the history of greek mathematics», *Archive for the History of Exact Sciences* 15 (1975), 67-114; «History of ancient mathematics. Some reflections on the state of the art», *Isis* 70 (1979), 555-565. También gracias a que el testigo de Neugebauer ha sido recogido por otros historiadores, en especial por VAN DER WAERDEN, *vid.* sus «Defense of a "schocking" point of view», *Archive for History of Exact Sciences* 15-3 (1976), págs. 199-210; *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations,* Berlin-Heidelberg-Nueva York, 1983. Creo que hay observaciones juiciosas en I. MUELLER, *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements,* Cambridge (Mass.)-Londres, 1981, págs. 42-44, 50-52; J. L. BERGGREN, «History of Greek mathematics: a survey of recent research», *Historia Mathematica* 11 (1984), págs. 397-398 en especial.

otro lado, sus planteamientos bien podrían ser, en general, una forma helenística de asumir el legado de la matemática mesopotámica, con la que coinciden en la manera de abordar los problemas y de resolverlos mediante ejemplos numéricos. Pero el caso de la tradición geométrica griega ya es otro cantar. Por un lado, esta tradición comporta un sentido de la demostración ajeno a las pruebas de los babilonios. Por otro lado, la tesis de un influjo específicamente babilonio sobre ella presupone una difusión de la matemática oriental en Grecia desde finales del siglo v a. C. que no es fácil precisar y, menos aún, documentar; por ejemplo, ¿cómo determinaremos si tal influjo tuvo lugar antes de Euclides (como la transmisión del gnomon) o después (como la asimilación tolemaica de la medición de ángulos en grados junto con el sistema sexagesimal)? En fin, la conjetura de una influencia babilonia directa habrá de justificarse frente a otras hipótesis posibles. Por ejemplo, la hipótesis de una invención griega independiente —como ya he dicho, la aplicación de áreas fue, según Eudemo, un «descubrimiento de la Musa de los pitagóricos»—. O la hipótesis de un *pool* y un trasiego de conocimientos matemáticos relativamente esparcidos por esta transitada zona del Mediterráneo oriental, donde ya se habían relacionado desde antiguo los sabios jonios (Tales, Pitágoras, Enópides de Quíos) y los egipcios, y puede que se vinieran compartiendo ciertos resultados: la difusión de los triplos pitagóricos y del propio «teorema de Pitágoras» bien puede ser el reflejo concreto de un acervo común o, cuando menos, de una suerte de ósmosis. Ante la escasez de datos al respecto, todas estas conjeturas son igualmente verosímiles. Por eso, el mayor mérito de la tesis (1), al margen de su esfuerzo por identificar una raíz definida de la tradición matemática griega, quizás consista

en llamar la atención sobre los motivos operativos y el interés por el cálculo que subyacen en ciertos desarrollos geométricos griegos —bien que esos motivos e interés sólo levanten cabeza de vez en cuando: con la versión pitagórica de la proporción, con Herón, con Diofanto—.

La tesis (2) es, a mi juicio, mucho menos aceptable. Se parece demasiado a una anacrónica «operación rescate»: a la traducción de los *Elementos* a un lenguaje más familiar para el lector de hoy, el algebraico. Pero, en este caso, el cambio de lenguaje equivale no a decir lo mismo de otro modo sino a hablar de otras cosas. En principio, una interpretación algebraica propiamente dicha incluye la abstracción estructural de unas leyes o condiciones operacionales que pueden cumplirse en muy diversos dominios de objetos. Pero esta concepción estructural no es la de Euclides: él no generaliza, más bien duplica o desdobla la aplicación de áreas en los libros II y VI, por razones metódicas o disciplinarias; y en otros casos que también se prestarían a una generalización análoga (e. g., a propósito de los conceptos de magnitud y número) tampoco da un paso en esa dirección estructural. Más aún: en II no hay ecuación alguna ni trasuntos algebraicos, sino la exposición de unos resultados deductivamente inconexos entre sí; baste reparar en que una vez probada la distributividad de la multiplicación (II, 1), dicha propiedad desaparece de escena y las pruebas de otras propiedades básicas como la conmutatividad o la asociatividad aparecen distanciadas en otros libros de los *Elementos*. Resumiendo, la impresión que produce el libro II se asemeja a ésta: el propósito de Euclides es ilustrar el método de aplicación de áreas y, en esta perspectiva, su proceder es más instructivo que el «algebraico» u otro de formato similar, pues en vez de remitir al aprendiz a un conjunto de fórmulas abstractas

o sistemáticas, lo pone en condiciones de probar desde un principio, por un método elemental y ejemplificado en diversos casos, otras proposiciones del mismo género [21].

El libro III parte de 11 definiciones y contiene 37 proposiciones, 5 de ellas problemas y las otras teoremas. Presenta la geometría del círculo e incluye el estudio de círculos, sus segmentos, intersecciones y tangencias. Tiene especial relieve la construcción de III, 1 para determinar el centro del círculo, aunque su prueba supone que una recta y un círculo no pueden tener más de dos puntos en común y ésta es una condición que cabe establecer a partir de III, 2. La suposición tácita más general es la característica de la geometría plana euclídea, la de continuidad. El libro no está muy cuidado desde un punto de vista sistemáticamente deductivo. Apenas guarda relación con los anteriores y tampoco tiene mucha cohesión interna: dejando al margen III, 1, hay 12 proposiciones (2, 3, 5-8, 12, 14, 16, 18, 20, 23) que no dependen de resultados presentes en III, y hay 13 proposiciones (4, 7, 8, 12-13, 15, 25, 29-30, 33-35) que nada contribuyen a la obtención de otros resultados dentro del mismo libro. Tal vez por esta razón cundan las revisiones y mejoras posteriores de varias de sus pruebas y abunden las alternativas propuestas por los comentadores y editores.

El libro IV parte de 7 definiciones y consta de 16 proposiciones, todas ellas problemas. Estudia inscripciones y circunscripciones de figuras regulares rectilíneas y círculos, y ofrece la construcción de polígonos regulares, como el pentágono o el hexágono, por la duplicación de los lados. El libro está formado en cierto modo por núcleos y quizás el más notable sea el dispuesto en torno a la inscripción

[21] *Vid.* T. L. Heath, ed. cit., 1926², I, pág. 377.

del pentágono regular, IV, 11. En este resultado concurren IV, 1-2, 5, 10, amén de material procedente del libro anterior (e.g., III, 26-27, 29), y de él parten las pruebas de IV, 12, la circunscripción del pentágono, y IV, 16, el problema final de la inscripción de un polígono regular de quince lados. Según el escolio IV, 2.°, «este libro es descubrimiento de los pitagóricos». Puede que estos orígenes y su afinidad con la tradición de los problemas lo hicieran un tanto refractario a un tratamiento sistemático. En todo caso, su calidad desde el punto de vista instructivo y disciplinario es muy superior a su cohesión deductiva interna o a su congruencia teórica.

3. *La teoría generalizada de la proporción. (Libros V-VI)*

Con el libro V pasamos al campo de la teoría de la proporción y a un legado matemático relativamente reciente. La teoría se refiere a las magnitudes como términos de la relación de proporcionalidad. La forma de aparición de la teoría —en sustitución de nociones anteriores más limitadas y concretas de razón y proporción, en la primera mitad del siglo IV—, el hecho de que estas magnitudes hayan de cumplir ciertas condiciones —la de ser homogéneas y «arquimedianas»—, el punto oscuro de las relaciones entre las ideas de magnitud y de número, son motivos de que la califique de teoría «generalizada», en vez de referirme a ella como teoría sencillamente «general», de la proporción.

El libro comprende 18 definiciones, algunas de ellas sustanciales, y 25 proposiciones, todas ellas teoremas. Según la definición 1, «una magnitud [*mégethos*] es una parte de una magnitud, la menor de la mayor, cuando mide [*ka-*

tametrê] a la mayor». Cabe entender que las magnitudes son abstracciones o idealizaciones de objetos geométricos que únicamente consideran la cantidad, *i.e.* la longitud en el caso de las líneas, el área en el caso de las figuras planas, el volumen en el caso de los sólidos. Según la definición 2, «la mayor es un múltiplo de la menor cuando es medida por la menor». Así pues, son magnitudes susceptibles de multiplicación. Si x es un m-múltiplo de y, x mide m veces y; entonces: $x = m.y = ((y+y)_1 + y)_2 + \ldots + y)_m$, de modo que la multiplicación $m.y$ de una magnitud y equivale a una adición reiterada m veces. Con ello se está suponiendo la existencia, para una magnitud dada, de un número indefinido de magnitudes iguales a ella —un supuesto tácito en V, pero tal vez declarado en otra obra de Euclides, *Datos,* cuya definición 12 explica que áreas, rectas, ángulos y razones «están dados en magnitud cuando podemos hacer otros iguales a ellos»—.

Hay además otras nociones y suposiciones nunca declaradas: por un lado, el concepto de medición y las relaciones «medir a/ser medido por»; por otr lado, el supuesto de que siempre es posible considerar la m-parte de una magnitud, de manera que para toda magnitud x hay una magnitud y tal que $x = m.y$. Esta suposición obra tácitamente en la prueba de V, 8 sobre la proporcionalidad de las composiciones de magnitudes proporcionales; conviene anotar de paso que tal suposición no vale para los números estudiados en los libros VII-IX. Según la Def. 3, «una razón [*lógos*] es un tipo de relación en lo que se refiere al tamaño entre dos magnitudes homogéneas». De aquí podría sacarse la impresión de que una razón, a imagen y semejanza de un espíritu elemental, es algo que se deja sentir con más facilidad que definir. La definición siguiente viene a introducir ciertas precisiones; además confirma

la impresión de que la noción de razón no tiene mucho sentido fuera del contexto de la teoría de las proporciones [22]. La Def. 4 es una de las consideradas básicas en la teoría: «Se dice que tienen una razón entre sí las magnitudes que, al ser multiplicadas, una de ellas puede exceder a la otra». Aparte de conocer una suerte histórica un tanto accidentada, su interpretación también ha sido variopinta. Hay escoliastas que ven en ella una caracterización de la homogeneidad de las magnitudes involucradas; los hay que entienden la definición en el sentido de excluir las magnitudes infinitas, tanto infinitamente grandes como las infinitamente pequeñas —más justo es entender que excluye la relación de razón entre una magnitud finita y otra infinita del mismo género—; hay quienes leen la definición como si implicara magnitudes inconmensurables —aunque la distinción entre las magnitudes conmensurables y las inconmensurables carece de lugar en este contexto—. Además cabe relacionar la Def. 4 con un supuesto que Arquímedes recuerda o explicita en la *Cuadratura de la parábola* y formula de modo más general en *Sobre la esfera y el cilindro:* «de líneas desiguales, superficies desiguales y sólidos desiguales, el mayor excede al menor por una magnitud que añadida a sí misma puede exceder a cualquier otra

---

[22] Sobre la suerte de la idea de razón antes y después de esta teoría generalizada de la proporción, *vid.* D. H. Fowler, «Ratio in early Greek mathematics», *Bull. Amer. Mathem. Society* 1-6 (1979), 807-846; «Anthyphairetic ratio and Eudoxian proportion», *Archive for History of Exact Sciences* 24 (1981), 69-72; «*Logos* (ratio) and *Analogon* (proportion) in Plato, Aristotle, and Euclid», en J. Petitot, dir., *Logos et Théorie des Catastrophes* (Colloque de Cerisy), Ginebra, 1988, págs. 444-472. También cabe considerar las relaciones entre la concepción inicial de razones y de proporciones y la teoría musical, a la luz del análisis filológico de A. Szabó, *The Beginnings of Greek Mathematics,* Dordrecht-Boston-Budapest, 1978; § 2.8, págs. 134-137.

dada del mismo género» (I, asunción 5). De este supuesto se sigue la existencia de los múltiplos de una magnitud dada: si $x < y$, hay una magnitud m tal que $m.x > y$. Suele recibir el nombre de «condición arquimediana» —o el de «postulado de continuidad»—. Dentro de los *Elementos*, contribuye a la prueba de V, 8 y mucho más adelante, a través precisamente de la Def. V, 4, a la prueba de X, 1. Vistas así las cosas, la asunción de Arquímedes extiende el criterio euclídeo de razón postulando que si dos magnitudes guardan entre sí una razón conforme a la Def. 4, su diferencia guardará una razón en el mismo sentido con cualquier otra magnitud homogénea, *i.e.* si $x > y$, hay una magnitud n tal que $n.(x—y) > z$. Pero, en fin, también cabe entender que la Def. 4 de Euclides y la condición arquimediana son dos versiones independientes de un supuesto que obraba en las pruebas por «exhausción» que había avanzado Eudoxo: Euclides define la relación «A guarda razón con B» entre magnitudes, dentro de su teoría de la proporción, y hace referencia a la multiplicación; Arquímedes postula en cambio una condición precisa para que ciertas clases de magnitudes homogéneas (líneas, áreas, sólidos) se atengan efectivamente a la definición euclídea, y hace referencia a la adición de diferencias. A esta luz, la versión euclídea parece una reconstrucción tan elaborada como lejana de la base deductiva eudoxiana en la que se apoyan el lema de bisección (el teorema X, 1) y sus aplicaciones (e. g., XII, 2, 7, 10); mientras que la versión de Arquímedes es una elucidación certera y más próxima del supuesto que late en las pruebas correspondientes a esos resultados. Según esto, el interés de Euclides no estriba de momento en seguir los pasos dados por Eudoxo, sino más bien en sentar las bases propias de su teoría abstracta de la proporcionalidad.

La Def. 5 es la piedra angular de la teoría: «Se dice que están en la misma razón unas magnitudes, la primera con respecto a la segunda y la segunda con respecto a la cuarta, cuando si se toman unos equimúltiplos cualesquiera de la primera y la tercera, y unos equimúltiplos cualesquiera de la segunda y la cuarta, los primeros equimúltiplos exceden a la par, o son parejamente iguales, o resultan parejamente deficientes que los últimos equimúltiplos tomados unos y otros en el orden correspondiente». Si suena a cosa abstrusa, la culpa es del lenguaje común. Su contenido conceptual es claro: suministra un criterio suficiente y necesario de proporcionalidad. La Def. 6 estipula que las magnitudes que guarden la misma razón se llamen proporcionales [en proporción, *análogon*]. Diremos entonces que los términos x, y, z, w son proporcionales («x es a y como z es a w») si y sólo si se da lo siguiente: si $m.x > n.y$ entonces $m.z > m.w$, o si $m.x = n.y$ entonces $m.z = n.w$, o si $m.x < n.y$ entonces $m.z < n.w$, para todo m, n. Conviene caer en la cuenta de que una proporción no es una igualdad entre dos objetos, una relación binaria o una identidad entre razones, sino más bien una relación cuaternaria, como revela el hecho de que Euclides se crea obligado a demostrar la proposición V, 11 («las razones que son las mismas que una misma razón también son las mismas la una que la otra «—*i.e.* si A:B::C:D y E:F::C:D entonces A:B::E:F—), en vez de considerar que se trata de una aplicación obvia o trivial de la noción común (i*); así pues, la notación usual de una proporción euclídea en los términos «$(x, y) = (z, w)$» resulta inadecuada.

La def. 7 representa a su vez un criterio de no proporcionalidad. Reza así: «Cuando, de los equimúltiplos, el múltiplo de la primera magnitud excede al de la segunda pero el múltiplo de la tercera no excede al de la cuarta, entonces

se dice que la primera está en una razón mayor con la segunda que la tercera con la cuarta». Es decir: x es a y más que z a w si y sólo si se da $m.x > n.y$ pero no se da $m.z > n.w$, para algún m, n. Suplementariamente se supone la existencia de un cuarto término proporcional: se halla implícito en la prueba de V, 18, aunque más tarde Euclides viene a demostrar un caso particular, VI, 12: «dadas tres líneas, hallar una cuarta proporcional». Consecuencia importante de este supuesto es la condición de tricotomía (dadas dos magnitudes o razones cualesquiera, una es mayor o igual o menor que la otra), coherente con el sistema ordenado de objetos que hoy podríamos tomar como el dominio de referencia de la teoría. Todo ello le permite a Euclides el recurso adicional de las pruebas indirectas de proporcionalidad *(i. e.* que x es a y como z es a w*)* por reducción al absurdo de las alternativas de desproporción *(i. e.* que la razón de x a y sea mayor o sea menor que la de z a w*)*. Si el criterio de equimúltiplos que da lugar a la Def. 5 se inspira en Eudoxo —según suele reconocerse—, esta Def. 7 bien puede ser una contribución enteramente original de Euclides.

La teoría de la proporción del libro V viene siendo en nuestros días un objeto predilecto de reconstrucciones y reestructuraciones axiomáticas [23]. Al margen de ellas, el libro constituye por sí mismo una presentación sistemática de ideas y resultados que proceden de investigaciones relativamente recientes en la época de la confección de los *Elementos*. El escolio V 1.° recoge la opinión de quienes dicen que el libro es un descubrimiento de Eudoxo (miembro

[23] Cabe destacar las formuladas por F. Beckman, «Neue Gesichtspunkte zum 5. Buch Euklids», *Archive for History of Exact Sciences* 4 (1967), 1-144; I. Mueller, *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure...*, op. cit., 1981, cap. 3, págs. 145-148 en especial.

distinguido de la Academia de Platón hacia 370-360); el escolio V 3.° precisa que el libro, aunque se considere como una contribución de Eudoxo, debe su organización a Euclides; esta organización puede haber incluido variantes euclídeas equivalentes, pero no idénticas, a los supuestos y lemas empleados por Eudoxo [24]. En cualquier caso, su notable cohesión interna y el poder de sistematización de esta teoría de la proporción le han valido al libro cierto crédito «axiomático». H. Hasse y H. Scholz, en su influyente (pero no muy afortunado) artículo «Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik» *(Kantstudien* 33 (1928), 4-34), lo describen como el primer intento de una axiomatización completa. Desde luego, es más justo ver en él una reelaboración de las nociones recibidas en orden a conseguir unos conceptos y unos criterios precisos como los formulados en las definiciones 4, 5 y 7; también es notable el grado de abstracción de la teoría. Pero algo que hoy echamos de menos es justamente la base axiomática que le deparan sus actuales reconstrucciones: la explicitación de ciertos postulados existenciales, la expresión de unas leyes combinatorias y la acotación de las condiciones que determinan los objetos que pueden pertenecer a su dominio de referencia. Por otro lado, aún nos aguarda un punto oscuro pero singularmente significativo: el de las rela-

[24] *Vid.* W. R. Knorr, *The Evolution...*, op. cit., 1975, págs. 261-263; «Archimedes and the pre-Euclidean proportion theory», *Archives Intern. d'Histoire des Sciences* 28-103 (1978), 183-244; cf. también J. L. Berggren, «History of Greek mathematics: a survey...», art. cit., 1984, pág. 399 especialmente. J. L. Gardies, por otra parte, ha intentado reconstruir la teoría presuntamente original de Eudoxo y ha destacado los problemas que supone su inmersión en el contexto de los *Elementos:* vid. *L'héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide (Un essai de reconstitution)*, París, 1988.

ciones entre las magnitudes del libro V y los números del libro VII. Esta oscuridad en una cuestión capital para la fundamentación de unas investigaciones matemáticas cercanas a Euclides, según muestra el libro X, no es propia de una materia que ya está suficientemente trabajada y dispuesta a recibir la bendición deductiva de su coronación axiomática; menos excusable es todavía si se trata de la fundación axiomática misma de una teoría general. La oscuridad en ese respecto más algunas otras ambigüedades y lagunas indican que la reflexión de Euclides sigue en parte empeñada en el duro trabajo de análisis conceptual y de depuración deductiva que habían iniciado algunos pioneros como Teeteto y Eudoxo.

El libro VI empieza con 4 definiciones y contiene 33 proposiciones, de las que 8 son problemas y las restantes teoremas. Aplica la teoría de la proporción a la geometría plana desarrollando una teoría de los polígonos semejantes y generalizando el procedimiento de la aplicación de áreas. No es raro entonces que algunos de sus problemas vengan a ser réplicas generalizadas de resultados obtenidos por medios más elementales en los dos libros primeros (e. g., VI, 31 es una generalización de I, 47; VI, 28, de II, 5; VI, 30, de II, 11; VI, 13, de II, 14). El libro está compuesto por diversos núcleos: VI, 4-7 sientan las condiciones de semejanza entre dos triángulos (a partir del criterio establecido en la Def. 1: «figuras rectilíneas semejantes son las que tienen sus ángulos rigurosamente iguales y los lados en torno a los ángulos iguales proporcionales», noción ya conocida por Aristóteles *(APo.* II 17, 99a13-14) y no muy precisada aquí, pues omite la necesidad de tomar los ángulos iguales en el mismo orden). VI, 9-13 se ocupan de problemas de cortar rectas en proporciones dadas o determinar rectas que las satisfagan (VI, 13 prueba la manera de hallar una media proporcional entre dos rectas dadas). Otro núcleo, 18-26, apunta hacia 28 y 29, donde hoy suelen verse contrapartidas geométricas de ecuaciones cuadráticas. Hay, en fin, proposiciones como VI, 32-33 que miran hacia las construcciones del libro XIII. En suma, el libro carece de cohesión interna e incluso presenta alguna que otra anomalía desde un punto de vista deductivo como, por ejemplo, la prueba de un caso particular VI, 14 sin reducción al caso general VI, 23, o la separación entre una proposición (VI, 24) y su conversa (VI, 26) por la interposición de otra, VI, 25, con cierto interés histórico —recoge un resultado atribuido a Pitágoras (la construcción de una figura semejante a una figura rectilínea dada e igual a otra figura rectilínea dada)—, pero sin un cometido teórico o metódico de relieve en este contexto.

4. *Teoría de la aritmética. (Libros VII-IX)*

Los libros VII-IX presentan y desarrollan la aritmética de los *Elementos*. En conjunto, comprenden 102 proposiciones presididas por las 23 definiciones que Euclides introduce en el libro VII. Puede ser un signo de unidad esta agrupación de las definiciones a la cabeza del VII, que contrasta con el hábito anterior de irlas distribuyendo por cada uno de los libros I-VI. También suelen llamar la atención la ausencia de postulados y el hecho de que en VII-IX no se reconozca ningún problema como tal. Las pocas proposiciones que no constituyen teoremas expresos, e. g., VII, 2-3, o IX, 18-19, son investigaciones más teóricas que prácticas: se marcan el propósito de hallar algo (VII, 2: la medida común máxima de dos números no primos entre sí; VII, 3: la medida común máxima de tres: IX, 18: un

tercer término proporcional a unos números dados; IX, 10: un cuarto término proporcional), en vez de hacerlo o construirlo —aunque los mss. de la tradición teonina rematan la prueba de VII, 3 con la fórmula equívoca «que es lo que había hacer»—. La aritmética de los *Elementos* considera que los números son unos objetos susceptibles de hallazgo, no de generación o producción, y en VII-IX desaparece la habitual terminología diagramática que describe o prescribe acciones como las de construir, levantar, prolongar, cortar, etc. Los objetos aritméticos parecen ser entidades u objetos de otro tipo que los geométricos.

Algunas de las definiciones dignas de consideración son las siguientes:

Según la Def. 1, «la unidad [*monás*] es aquello en virtud de lo cual cada una de las cosas que hay es llamada una». Jámblico *(Introducción a la aritmética de Nicómaco* 11, 5) dice que ésta es la definición de unidad de los ⟨pitagóricos⟩ modernos; los pitagóricos antiguos la habían definido en ocasiones como una «divisoria entre número y partes» o como una «cantidad delimitante». Con la definición moderna ya parece familiarizado Platón (e. g.: «hombres asombrosos, ¿acerca de qué números discurrís en los cuales la unidad se halla tal como la consideráis, siendo en todo igual a cualquier otra unidad sin diferir en lo más mínimo ni contener en sí misma parte alguna?», *República* VII 526a). Tiene visos de ser una definición dirigida a separar la unidad de la multiplicidad y de la divisibilidad. Su sentido resulta algo menos impreciso a contraluz de la noción subsiguiente de número. Según la Def. 2, «un número es una pluralidad compuesta de unidades». Las relaciones entre la unidad y el número recuerdan la concepción que Aristóteles manifiesta en diversos lugares de la *Metafísica* (e. g.: «uno» significa «medida de una pluralidad», y «número» significa «pluralidad medida» y «pluralidad de medidas», y por eso es razonable que la unidad no sea un número, pues tampoco la medida es medidas, mientras que tanto la medida como la unidad son principios», *Metafís.* N 1, 1088a4-8). En el contexto de los *Elementos,* la unidad no es un número ni hay una cosa tal como la pluralidad formada por una sola unidad; de hecho, Euclides da pruebas separadas para las unidades (VII, 15) y para los números (VII, 9), aunque no siempre sea coherente con esta distinción. Por otro lado, a tenor de la prueba de VII, 31 («todo número compuesto es medido por algún número primo»), la pluralidad numérica es una pluralidad finita —la prueba discurre por una reducción al absurdo de la suposición opuesta cuyo desenlace sería la asunción de una divisibilidad infinita de los números, pero esto, declara Euclides, «es imposible en los números [*adynaton én arithmoîs*]»—. Así pues, el primer supuesto de la aritmética euclídea viene a ser que hay una cantidad indefinida de unidades y que sus colecciones finitas constituyen números. A esto se añade otro rasgo característico de la concepción aritmética de los *Elementos,* ya apuntado antes: los números no se producen, se encuentran; los números no se generan dentro de una serie mediante la idea de sucesión, ni se determinan por esta formación genealógica —según acostumbramos a pensar hoy en la estela de un Peano o de un Frege—. La verdad es que no faltan a veces en la aritmética de los *Elementos* razonamientos «inductiviformes» sobre colecciones y secuencias de números naturales dados (e. g., en la línea VII, 2, 3, 33); pero esta teoría no tiene una idea estructural de la serie infinita de los números enteros ni cuenta con un principio general de inducción matemática; por ejemplo, en VII, 16, Euclides prueba la conmutatividad de la multiplicación no con

arreglo a este principio, sino mostrando su aplicación en unos números dados (que representan, podemos suponer, números cualesquiera).

Según la Def. 3, «un número es parte de un número, el menor del mayor, cuando mide al mayor»; ahora bien, como añade la Def. 4, un número no es parte sino «partes, cuando no lo mide». (Por «parte [*méros*]» se entiende una parte alícuota o submúltiplo; por «partes [*mére*]», un número de partes alícuotas o una fracción propiamente dicha.) Recíprocamente, «el número mayor es un múltiplo del menor cuando es medido por el menor», dice la Def. 5. El uso posterior de estas definiciones envuelve nuevas suposiciones tácitas sobre la noción de medida y la relación de medir una cantidad un número determinado de veces, amén de los axiomas pertinentes —e. g.: si A mide a B y B mide a C, A mide a C; si A mide a B y a C, A mide a B+C—. Podemos colegir que «X mide a Y» significa «X es un factor o divisor exacto de Y», pues «Y es medido por X» monta tanto como «Y es un múltiplo de X». Entonces, X es *parte* de Y si y sólo si X < Y y X es, en efecto, un factor o divisor de Y —siendo Y a su vez múltiplo de X—. Por ejemplo, el número 2 es parte del número 6. Pero X es *partes* de Y si y sólo si X < Y, sin que X sea un factor o divisor exacto de Y —ahora nos hallamos ante una fracción propiamente dicha—. En este sentido, el 4 no es *parte* sino *partes* del número 6.

Euclides recoge a continuación, en las definiciones 6-10, un conjunto de nociones de clara estirpe pitagórica: las de número par (Def. 6: «número par es el divisible en dos partes iguales»), número impar (Def. 7: «número impar es el no divisible en partes iguales, o el que difiere de un número par por una unidad»), y otras nociones derivadas. Según la Def. 11, «un número primo es el que sólo es medido por una unidad»; Aristóteles ya había precisado que el número primo no era medido por ningún número (*APo.* II 13, 96a36), en razón de que la unidad no es un número. Según la Def. 12, «números primos entre sí son aquellos que sólo son medidos por una unidad como medida común». La importancia que cobran en el libro VII los números primos relativos es considerable. Quizás se derive de la efectividad del algoritmo euclídeo para hallar la medida común máxima (el máximo común divisor) de dos números, que se presenta en VII, 1 como un «test» de esa propiedad de ser primos entre sí. Puede que el interés un tanto absorbente de Euclides por estos primos relativos le haga descuidar los primos «absolutos» y contribuya a que su prueba del hoy denominado «teorema fundamental de la aritmética» —a saber: la factorización unívoca de los números primos—, no sea una demostración completa ni en el caso del teorema que más se le aproxima, IX, 14, ni en otros teoremas análogos, VII, 30-31.

Según la Def. 15, «se dice que un número multiplica a un número cuando el multiplicado es añadido a sí mismo tantas veces cuantas unidades hay en el otro, y así se produce [*génetai*] algún número». Se trata de una versión clásica de la multiplicación como abreviatura de un proceso reiterativo de adición. La «generación» que se menciona no es sino la constitución de un número en tales términos y no cabe pensar en una suerte de construcción o producción recursiva.

Conforme a la Def. 20, «los números son proporcionales cuando el primero es el mismo múltiplo, o la misma parte, o las mismas partes, del segundo que el tercero del cuarto». Euclides no define la noción aritmética de razón. Su idea de la proporción numérica envuelve de hecho aquellos supuestos de la teoría generalizada de la proporción

que pueden aplicarse en el presente caso. De seguir por esta línea, todo número sería una magnitud, aunque no toda magnitud fuera un número, pues los números del libro VII no cumplen ciertas condiciones de las magnitudes del libro V, como la posibilidad de tomar en todo caso la *m*-parte de una magnitud o como la existencia de un cuarto término proporcional. Pero ésta no es precisamente la perspectiva de los *Elementos;* tampoco se dice en lugar alguno que los números de VII-IX son una clase de magnitudes conmensurables. De manera que si bien Euclides emplea tácitamente algunos presupuestos de la teoría generalizada de la proporción en el desarrollo de la aritmética, lo cierto es que demuestra las propiedades de la proporción numérica por separado y no transfiere a los números las propiedades de la proporción generalizada que podrían convenirles. A lo largo de VII-IX todo parece indicar que nos las habemos con unos objetos matemáticos relativamente autónomos e independientes de las magnitudes de V-VI; al menos por el momento, los *Elementos* no traslucen ningún motivo para entretejer la caracterización de los números con la antes prevista para las magnitudes. Nos aguarda una sorpresa más adelante, en X, 5.

Desde un punto de vista sistemático, el libro VII es una esmerada reconstrucción del antiguo legado aritmético de raíces pitagóricas [25]. Su cohesión deductiva interna, aun-

[25] Las reconstrucciones modernas de la aritmética pitagórica parten de O. BECKER, «Die Lehre vom Geraden und Ungeraden im neunten Buch der euklidischen *Elemente*», *Quellen u. Studien z. Geschichte der Mathem., Astron. u. Phys.*, Abt. B 3 (1936), 533-553. Buen exponente del camino recorrido en esta línea de reconstrucción es M. MALDENDIER, «Eine axiomatik zum 7. Buch der *Elemente* von Euklid», *Mathem.-Phys. Semesterberichte* 22 (1976), 240-254. Una exposición clásica del legado pitagórico ha sido la de W. BURKERT (1962): *Lore and Science in Ancient*

que no tenga una disposición tan lineal y bien dispuesta como la del libro I, resulta parejamente estimable. Algo parecido cabría decir de su calidad y eficacia expositivas como introducción a ciertos métodos peculiares de la aritmética griega. VII, 1-3 presentan el algoritmo euclídeo para la determinación de números primos y el hallazgo de la medida común máxima entre dos o tres números no primos entre sí (en VII, 33, el procedimiento se generaliza «a tantos números cuantos se quiera»). He ahí una de las joyas de la corona de la tradición matemática griega. VII, 4-20 sientan las bases de la teoría de la proporción numérica que se aplica en este y en los otros dos libros de la aritmética. VII, 21-32 desarrollan el importante tema euclídeo de los primos relativos y VII, 33-39 estudian la expresión de razones en sus menores términos y el hallazgo de mínimos comunes múltiplos. Por lo demás, la agrupación de las definiciones en la cabecera del libro y el material fundacional recogido en su primera parte hacen de él una fuente sistemática de ulteriores resultados como los obtenidos en los dos libros siguientes.

El libro VIII se ocupa de series de números en proporción continua, *i. e.* en progresión geométrica, noción que permanece indefinida.

Pythagoreanism, Cambridge (Mass.), 1972, págs. 427-447. También ha ejercido cierta influencia B. L. VAN DER WAERDEN, *Die Pythagoreer: Religiöse Bruderschaft und Schule der Wissenschaft*, Zurich, 1979. W. R. KNORR, *The Evolution...*, op. cit., 1975, págs. 131-169, ofrece una espléndida visión panorámica de la aritmética y otros aspectos de interés; *vid.* también su «Problems in the interpretation of Greek number theory», *Studies in History and Philosophy of Science* 7 (1976), 353-368. Más reciente —y, por lo regular, demasiado entusiástica— es la revisión de L. ZHMUD, «Pythagoras as a mathematician», *Historia Mathematica* 16 (1989), 249-268.

El libro IX es ya una especie de miscelánea aritmética. Incluye el resultado IX, 4, la primicia de la moderna resolución unívoca de un número en sus factores primos, y el teorema IX, 20, que establece la cantidad infinita de los números primos: «los números primos son más que cualquier multitud determinada de números primos». En IX, 21-34, Euclides da la impresión de transcribir un manual anterior seguramente de origen pitagórico que versaría sobre pares, impares y sus relaciones —en opinión de algunos, como Heath, no faltan indicios de la existencia de unos *Elementos* de aritmética en la época de Arquitas, entre el último tercio del siglo v a. C. y la primera mitad del siglo IV; por desgracia, no hay mención ni referencia alguna al respecto [26]—. El libro y esta parte aritmética de los *Elementos* se cierran con la prueba de IX, 36, que da la fórmula para obtener los llamados «números perfectos» —según la Def. 22 de VII, «números iguales a la suma de sus factores» (e. g., el número 6, el 28, el 296)—.

5. *El libro X: «la cruz de los matemáticos»*

El libro X ha venido a conocerse como «la croix des mathématiciens» desde que Simon Stevin empleara esta denominación para recordar que muchos sólo veían en este libro dificultades sin provecho [27]. Creo que el apelativo podría extenderse: si fue entonces una «cruz» para los matemáticos renacentistas, todavía representa hoy una especie de cruz para los historiadores de las matemáticas. Pero creo además que no merecería esa denominación únicamente por los problemas de interpretación que ha suscitado, sino por su condición de encrucijada dentro de los *Elementos*. En él confluyen desarrollos de la teoría generalizada de la proporción y motivos aritméticos; de él parten nuevas vías de construcción de figuras regulares tanto planas como sólidas —tema posterior de los libros XI-XIII sobre la geometría del espacio—. Consta de 16 definiciones repartidas en tres grupos a lo largo del libro; incluye 115 proposiciones, todas ellas probadas como teoremas, aunque varias (unas 24) revistan la forma ya conocida de las investigaciones que se proponen hallar algo con independencia de sus condiciones de generación o de construcción. El libro acusa en parte un laborioso esfuerzo por reconstruir de forma sintética, como si se tratara de hacer un ejercicio metódico y académico, varias series de problemas, susceptibles quizás de soluciones analíticas más simples aunque sean relativamente avanzados. En sustancia, está dedicado al estudio de tipos y criterios de conmensurabilidad e inconmensurabilidad y a la clasificación de rectas irracionales. De ahí la importancia del primer grupo de definiciones que encabeza el libro.

Según la Def. 1, «se dicen conmensurables [*sýmmetroi*] las magnitudes que son medidas por la misma medida, e

[26] *Vid.* T. L. HEATH, ed. cit., 1926², pág. 295. L. ZHMUD, art. cit., 1989, págs. 253-254, va más lejos aún y acoge, sin la menor reserva, la existencia de un manual pitagórico de aritmética anterior a los *Elementos* de Hipócrates —se trata de una conjetura avanzada por P. TANNERY (1887, reimp. 1988), *La géométrie grecque*, op. cit., págs. 87-95, de la que luego se han hecho eco algunos otros como A. Rey o B. L. van der Waerden—.

[27] *Vid.* C. M. TAISBAK, *Coloured Quadrangles. A Guide to the Tenth Book of Euclid's Elements*, Copenhague, 1982. W. R. KNORR, «La croix des mathématiciens: the Euclidean theory of irrational lines», *Bull. Amer. Mathem. Society* 9 (1983), 41-69; «Euclid's tenth book: An analytic survey», *Historia Scientiarum* 29 (1985), 17-35. D. H. FOWLER, *The Mathematics of Plato's Academy*, Oxford, 1987, cap. 5 en especial, y «An invitation to read Book X of Euclid's *Elements*», ensayo reciente (enero de 1991) todavía inédito.

inconmensurables [*asýmmetroi*] las que no tienen ninguna medida común». De acuerdo con la Def. 2, «las líneas rectas son conmensurables en cuadrado [*dynámei*] cuando los cuadrados ⟨levantados⟩ sobre ellas son medidos por una misma área, e inconmensurables en cuadrado cuando los cuadrados sobre ellas no pueden tener ninguna área como medida común». (El término «*dýnamis* (potencia)» tiene en matemáticas una referencia equivalente a lo que nosotros significamos con «elevar a la segunda potencia» —o incluso con «raíz cuadrada» a tenor de Platón, *Teeteto* 147d[28]—; en contextos geométricos esta potencia particular es obviamente el cuadrado.) A tenor de la Def. 3: «con estos supuestos se prueba que hay una cantidad ilimitada de líneas rectas que son conmensurables e inconmensurables respectivamente, unas sólo en longitud [*mékei*] y otras en cuadrado también, con una línea recta designada. Llámense entonces racional [*rheté*] la línea designada y racionales las líneas que son conmensurables con ella, bien en longitud y en cuadrado, bien en cuadrado sólo, pero irracionales [*alógoi*] las inconmensurables con ella». Y en fin, como estipula la Def. 4, las áreas se llamarán racionales o irracionales según que sean conmensurables o inconmensurables con un cuadrado racional. Sentada la distinción

[28] Este pasaje y su contexto (*Teeteto* 147c-148a), donde Teeteto da cuenta de su investigación de inconmensurables en la perspectiva abierta por las contribuciones de Teodoro, es uno de los testimonios de Platón más oscuros y debatidos hasta el punto de constituir por sí solo un foco principal de discusión de la historia de la matemática griega, *vid.* J. L. Berggren, «History of Greek mathematics: a survey...», art. cit., 1984, págs. 395, 401-402. Cf., por ejemplo, W. R. Knorr, *The Evolution...*, op. cit., 1975, págs. 62-108; M. F. Burnyeat, «The philosophical sense of *Theaetetus'* mathematics», *Isis* 69-249 (1978), 489-513; W. R. Knorr: «Methodology, philology and philosophy», *Isis* 70-254 (1979), 565-570.

capital entre las magnitudes conmensurables e inconmensurables, tiene especial relieve la subdivisión de las rectas conmensurables/inconmensurables en otras dos clases: las que lo son en cuadrado y las que lo son en longitud. Las primeras son el objeto de la Def. 2. Las segundas aparecen determinadas en el contexto de X, 9: las rectas son conmensurables o inconmensurables en longitud según que sus cuadrados tengan entre sí o no la razón que un cuadrado guarda con un número cuadrado —el escolio 62 de X asegura que éste fue un hallazgo de Teeteto; recordemos, por lo demás, que un número cuadrado era ya en la tradición pitagórica el producto de dos factores iguales—. Un porisma de la prueba de X, 9 agrega: si A es conmensurable en longitud, es conmensurable en cuadrado, pero no vale la conversa —hay líneas que siendo conmensurables en cuadrado, como los catetos y la hipotenusa de un rectángulo, no lo son en longitud—; y por ende, si A es inconmensurable en cuadrado, es inconmensurable en longitud, pero tampoco vale a la inversa. La Def. 3 introduce un nuevo motivo de clasificación: la distinción entre rectas racionales e irracionales. El escolio X, 1.°, da a entender que si la primera distinción entre magnitudes conmensurables e inconmensurables tiene lugar de modo natural [*phýsei*], ésta segunda entre líneas o áreas racionales e irracionales tiene lugar por convención [*thései*] y dice relación a la recta designada como racional. Por otra parte, este uso de «racional» en los *Elementos* parece peculiar de Euclides y tiene un sentido más amplio que otros anteriores o posteriores de la misma calificación; en justa correspondencia, su noción de irracionalidad resulta más restringida, pues sólo son líneas irracionales las que resultan ser inconmensurables tanto en longitud como en cuadrado con la recta designada como racional.

Son muchos y diversos los resultados dignos de mención que se encuentran en el libro X. Pero me contentaré con referirme a algunos de los expuestos al principio del libro. X, 1 es la base del método de «exhausción»: «dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se sustrae una magnitud menor que su mitad, y del resto una magnitud mayor que su mitad y este proceso es reiterado constantemente, quedará una magnitud que será más pequeña que la menor de las magnitudes dadas». Apenas rinde servicio alguno hasta el libro XII. Este teorema, junto con la Def. 4 del libro V, han sido objeto de discusiones historiográficas y matemáticas —como ya he apuntado a propósito de esa definición—. Por un lado, se les ha atribuido la misión de excluir la existencia de infinitésimos con el fin de prevenir las paradojas eleáticas sobre el infinito. No hay datos que avalen esta proyección matemática de un problema de origen cosmológico o físico; si acaso, Aristóteles testimonia que las cuestiones acerca de la divisibilidad infinita de una magnitud extensa no preocupan a los geómetras de su tiempo: a ellos les basta con postular la existencia de líneas finitas del tamaño que se quiera y la posibilidad de seccionar un segmento menor siempre que sea preciso (*Física* III 7, 207b27-34). Por otro lado, se ha planteado la relación de X, 1 con un lema anterior de Eudoxo, asumido luego y declarado por Arquímedes en el prefacio de *La cuadratura de la parábola* y como *lambánon* 5 de *Sobre la esfera y el cilindro* I. Y, en fin, desde un punto de vista más conceptual que histórico, también cabe considerar su significación en el contexto de la «exhausción» y en la perspectiva del cálculo infinitesimal. No puedo detenerme ahora en el método de «exhausción» [29], aunque sí conviene

[29] Una exposición clásica es la de E. J. Dijksterhuis (1956): *Archimedes*, Princeton, Nueva Jersey, reimp. 1987, págs. 130-133 en particular. También pueden verse B. Rodríguez-Salinas, «Arquímedes», en el colectivo *Historia de la matemática hasta el s. XVII*, Madrid, 1986, págs. 84-86 en especial; y L. Vega, *La trama de la demostración...*, op. cit., 1990, IV, § 3.1, para el funcionamiento del método en Euclides (*Elementos* XII, 2).

destacar las distancias y las diferencias entre este procedimiento griego de acotación métrica proporcional de áreas y el moderno cálculo infinitesimal. El método de «exhausción» griego conoce algunas variantes (de aproximación, de compresión), incluye esencialmente la reducción al absurdo y, sobre todo, carece de la noción de límite: por consiguiente, no necesita un principio de continuidad para establecer la existencia del límite de convergencia de una serie. En la práctica griega, el «límite» —por así decir— ya está dado por el objeto geométrico considerado y el método sólo tiene que aplicarse a la determinación de secuencias convergentes. En definitiva, Euclides —al igual que otros matemáticos griegos clásicos, como Eudoxo o Arquímedes— trabaja con objetos geométricos y en una perspectiva métrica de raíz cualitativa, en vez de operar con conceptos o estructuras generales de cálculo. Por lo demás, Euclides no presenta X, 1 como un lema envuelto en el uso de la «exhausción», según cabría esperar de una línea de trabajo eudoxo-arquimediana; antes de una aplicación de este tipo (e. g., en XII, 2), X, 1 aparece en el contexto antifairético [29bis] de las proposiciones X, 3-4, formulado en términos más débiles que los del lema de bisección exacta empleado por Arquímedes —pero un corolario de X, 1 no deja de señalar que «el teorema puede probarse de modo similar aun cuando las partes sustraídas

[29bis] «Anthyphaireîn [ἀνθυφαιρεῖν]» es la denominación técnica de Euclides para su procedimiento de sustracción recíproca, por ejemp. en VII, 1-2, y X, 3-4. Sobre su posible significación preeuclídea, *vid.* W. R. Knorr (1975), o. c., págs. 255-261 en particular.

sean iguales», y así recoge la bisección que luego será habitual en las pruebas arquimedianas—.

La proposición X, 2 se hace eco del criterio antifairético de inconmensurabilidad: dos magnitudes son inconmensurables si la operación metódica de búsqueda de su medida común máxima nunca tiene fin. Las proposiciones X, 3-4 ofrecen el algoritmo euclídeo para la determinación de la medida común máxima de dos o tres magnitudes conmensurables. X, 5 sienta que «las magnitudes conmensurables tienen entre sí la razón que un número guarda con otro número». Parte de la prueba de esta proposición descansa en la Def. 20 del libro VII, *i. e.* en la noción de proporción prevista para términos que sean todos ellos números, y en el supuesto tácito de que los términos que sean proporcionales en el sentido de la Def. 20 de VII, también lo son en el sentido generalizado de la Def. 5 de V. En otras palabras: después de haber dado dos caracterizaciones autonomas y separadas de la proporcionalidad, Euclides viene a suponer que la segunda puede considerarse un caso particular de la primera, o que los números se comportan —hasta cierto punto— de forma pareja a las magnitudes. Esta congruencia ya era familiar en tiempos de Aristóteles; Aristóteles muestra una clara conciencia de la generalidad de las pruebas derivables del concepto eudoxiano de proporción —podían aplicarse a números, tiempos, longitudes, sólidos *(APo.* I 5, 74a17)—; incluso hace la observación de que el método aritmético utilizado para establecer ciertas propiedades de las magnitudes no sería adecuado si las magnitudes no fueran de algún modo como los números *(APo.* I 7, 75b4-5). Sin embargo, no es una congruencia prevista expresamente en los *Elementos* —como pudimos notar a propósito de la def. 20 del libro VII—. Las proposiciones X, 6-8 mantienen y desarrollan la confluencia introducida en X, 5 para desembocar en el resultado antes citado, X, 9, atribuido a Teeteto.

El libro X recoge investigaciones relativamente recientes —de Teeteto, de Eudoxo y, posiblemente, de Hermótimo (el último autor anterior a Euclides que cita Proclo como «descubridor de muchos de los elementos»)—; se mueve en una línea de elucidación y de catalogación progresiva de unos resultados acerca de diversos tipos de conmensurabilidad/inconmensurabilidad y de clases posibles de rectas racionales/irracionales. Pappo, en un comentario sobre el libro que sólo se ha conservado a través de una versión árabe, reconoce el papel clarificador que corresponde a Euclides [30]. No obstante, el libro X mantiene cierta oscuridad y algunas ambigüedades de principio. Su estructura deductiva también adolece de una cohesión interna deficiente; por ejemplo, las proposiciones 27-35, 42-47, 66-70, 79-84, 85-90, 103-107 representan núcleos aislados en el conjunto del libro, y algunas otras, como 2-4, 24-25, 112-115, no cumplen ningún cometido en el conjunto de los *Elementos*. Del libro X se ha dicho incluso que es un desastre pedagógico (vid., por ej., W. R. Knorr, art. cit., 1983, pág. 59). Con todo y con esto, aún cabe reconocer al libro ciertos valores metódicos y disciplinarios: no sólo contiene el lema del procedimiento de «exhausción» y pre-

[30] Se trata de una versión de Abu Uzman Al-Dimashqi (de principios del siglo x) hallada en París (ms. 952, 2, Biblioteca Imperial) por F. Woepcke, *Mémoires présentés à l'Académie des sciences* XIV (1856), págs. 658-719. Según Pappo: «Por lo que se refiere a Euclides, ha dado pruebas rigurosas que ha sentado en relación con la conmensurabilidad y la inconmensurabilidad en general; ha precisado las nociones y las distinciones entre magnitudes racionales e irracionales, ha expuesto un gran número de tipos de magnitudes irracionales y por último ha clarificado todo su ámbito», *vid.* T. H. Heath, *A History of Greek Mathematics*, op. cit. (1921, reimp. 1981), pág. 403.

senta una nueva aplicación del algoritmo euclídeo, sino que logra una acabada clasificación de líneas irracionales que llega hasta catalogar 13 géneros distintos —enumerados al final de X, 111—; también enseña a construir muestras de cada uno de ellos, amén de demostrar que otras subdivisiones de alguno de estos géneros no son especies vacías.

6. *Geometría del espacio. (Libros XI-XIII)*

Los últimos libros, XI-XIII, contienen la geometría del espacio de los *Elementos.* Al igual que sucedía con la aritmética, esta parte descansa en 28 definiciones avanzadas al principio de su primer libro y carece de postulados propios. Consta de 75 proposiciones, 63 de ellas teoremas y las otras 12 problemas —aunque entre éstos aparezcan unas proposiciones mixtas, como XIII, 13-17, cuyo enunciado señala expresamente la construcción de un objeto y la demostración de alguna característica métrica esencial—. Un rasgo interesante de algunas definiciones (la Def. 14 de la esfera, la Def. 18 del cono) es una introducción del movimiento que les da un aire de descripciones genéticas. Por ejemplo, la Def. 14 dice: «cuando, permaneciendo fijo el diámetro de un semicírculo, se hace girar el semicírculo y se lo vuelve de nuevo a la misma posición de la que había partido su puesta en movimiento, la figura así comprendida es una esfera». Esta noción de esfera no era, desde luego, la única que podía conocer Euclides, pues Aristóteles ya estaba al tanto de que el criterio de equidistancia era extensible a esta figura sólida (vid. *De Coel.* II 14, 297a24) y, más tarde, Herón la definirá en esta línea de modo parejo a como Euclides había definido el círculo («una esfera es una figura sólida rodeada por una superficie tal que todas las líneas que caen sobre ella a partir de un punto interior de la figura son iguales entre sí», *Definiciones,* Def. 76). La opción de Euclides puede justificarse por su rendimiento en la prueba de las últimas proposiciones del libro XIII. Otra posibilidad que Euclides parece ignorar por completo es la de servirse en este caso de un postulado análogo al postulado (iii) de la geometría plana. En general, la ausencia de postulados específicos es digna de tenerse en cuenta. Un procedimiento que Euclides emplea habitualmente en su geometría sólida es la reducción de una cuestión tridimensional a otra bidimensional a la que aplica luego resultados o lemas previamente obtenidos. Pero esta estrategia reductiva supone relaciones —no tratadas antes en los *Elementos*— entre planos y puntos, planos y líneas, planos y planos, relaciones que en última instancia quedan todas ellas sin especificar. En fin, el empleo de la geometría plana en el contexto de XI-XIII también discurre al margen de un planteamiento expreso de la posibilidad de transferir los resultados acerca de un plano a la solución de problemas que envuelven más de un plano.

La celebridad de esta última parte de los *Elementos,* dejando aparte sus eventuales servicios a la astronomía helenística, ha residido en el estudio de los cinco poliedros regulares, los renombrados «cuerpos platónicos», en el libro XIII. (Esa fama, como ya he sugerido, no es una prueba de la filosofía platónica de Euclides; antes bien, sí es señal de que las matemáticas no estaban llamadas a librarse del fervor neoplatónico de los comentadores y albaceas posteriores de este legado clásico.) Euclides prueba la construcción dentro de una esfera de la pirámide o tetraedro (XIII, 13), el octaedro (XIII, 14), el cubo (XIII, 15), el icosaedro (XIII, 16), el dodecaedro (XIII, 17), y remata libro y tratado con un famoso corolario a la proposición XIII, 18, en

el que asegura que no existe ningún otro poliedro regular. En el libro XIII concurren materiales y resultados de casi todos los demás libros, de modo que presenta un alto grado de cohesión externa con el resto de los *Elementos*. Esto, a primera vista, concuerda con uno de los objetivos que Proclo atribuye al tratado: la construcción de los cinco sólidos regulares, los cuerpos cósmicos del *Timeo*. Pero este propósito no está respaldado por ninguna indicación del propio Euclides o del texto mismo. Cabe pensar, por otro lado, en una filiación de Euclides con la tradición matemática de la geometría sólida: tres de los poliedros regulares (el cubo, la pirámide, el dodecaedro) ya habían atraído la atención de los pitagóricos, y los otros dos (el icosaedro, el octaedro) habían sido estudiados por Teeteto, según recuerda el escolio XIII, 1.°. El hecho de que Teeteto pasara por ser «el primero en escribir sobre los cinco sólidos» cuadra bien además con su contribución al análisis de los irracionales y es, seguramente, una congruencia similar la que manifiesta y desarrolla Euclides en el libro XIII [31]. Así pues, podríamos alinear a Euclides no tanto en el ámbito cosmológico de influencia del *Timeo* —cuyo peso se hará sentir más bien pasado algún tiempo—, como en la estela matemática de unas tradiciones e investigaciones anteriores a este mismo diálogo de Platón. Esta línea de trabajo alcanza luego la madurez suficiente para dar lugar —pocos años antes de los *Elementos*— a un tratado

[31] Un tratado de Aristeo sobre los cinco sólidos regulares (compuestos a finales del siglo IV a. C.) podría haber sido la fuente más próxima de inspiración de Euclides, según han apuntado ALLMAN (1889, reimp. 1976): *Greek Geometry...*, op. cit., págs. 201-202, y T. L. HEATH, ed. cit., 1926², 3, págs. 438-439. De este tratado de ARISTEO («el viejo»), *Tôn pénte shkemáton sýnkrisis*, hay noticias por Hipsicles —el presunto autor del libro XIV añadido a los *Elementos*—.

de Aristeo dedicado expresamente a un estudio comparado de los cinco sólidos regulares: de este tratado pudo haberse beneficiado Euclides al componer el libro XIII, al igual que, efectivamente, lo haría más tarde el autor (Hypsicles) del apócrifo libro XIV.

El libro XIII recoge resultados de las otras partes de los *Elementos* salvo de la aritmética y —curiosamente— del libro XII. Además tiene una estructura deductiva interna sumamente cuidada. XIII, 1-5 constituyen lemas básicos para el desarrollo del libro que culmina en el análisis comparativo final de los sólidos regulares en XIII, 18 y en su corolario. Por contra, la cohesión y la capacidad sistemática de los dos libros precedentes, el XI y el XII, es mucho menor. El papel de XI es preparar el camino hacia XIII y lo más significativo de XII es seguramente el empleo del método de «exhausción» en las pruebas de XII, 2, 5, 10-12 y 18 sobre la base del lema X, 1 —se trata de una base parecida pero no igual a la que Eudoxo habría empleado en la obtención de XII, 2, 7, 10 y 18, según da a entender Arquímedes en el prefacio de *La cuadratura de la parábola*—.

Creo que todas estas observaciones de los apartados 1-6 permiten hacerse una idea global de la constitución del tratado a partir de los distintos libros que componen los *Elementos*. La conclusión más obvia y general es el contraste entre la fachada «axiomática» del libro I y la composición no poco heterogénea e irregular del tratado en su conjunto. Aunque la composición euclídea está lejos de justificar un énfasis sobre la informalidad de la prueba matemática como el expresado por Wittgenstein («Me gustaría decir: la matemática es una abigarrada *mezcla* de técnicas demostrativas», *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática* (1939-1940) III, § 46), también dista de

ser el sistema axiomático constituido por nuestra geometría euclidiana moderna o contemporánea. Los *Elementos* dan la impresión de hallarse a medio camino entre un extremo y otro. Esta impresión no sólo se debe a la variedad de los cuerpos teóricos involucrados —cuyos nexos sistemáticos no siempre se declaran — o a la diversidad de los métodos de solución y de prueba, sino también a la dispar conformación deductiva de los distintos libros. Por lo que refiere a este último aspecto, cabe sintetizar esas diferencias e irregularidades al hilo de unas nociones genéricas que ya he venido empleando y sólo aspiran a ser vías de aproximación.

Para empezar, propongo una distinción entre una cohesión deductiva interna y una cohesión externa. La cohesión interna será mayor o menor según sea el grado de sistematización deductiva existente entre las proposiciones de un determinado libro; la cohesión externa será mayor o menor según sea el grado de articulación deductiva que se dé entre el libro en cuestión y otros pertenecientes al mismo campo teórico. También cabe distinguir entre la coherencia teórica de un libro y su disposición disciplinaria o didáctica. La coherencia teórica será mayor o menor en razón de si el orden de desarrollo seguido casa mejor o peor con las líneas o focos de interés temático o sustantivo de los resultados presentados; la disposición disciplinaria será mejor o peor en razón de la claridad de la exposición y de su eficacia didáctica —aquí pueden tomarse en consideración la transición expositiva desde unas cuestiones relativamente simples a las otras más complejas, o las facilidades dadas para el aprendizaje y el dominio de unas técnicas de solución o de prueba—. Según esto, el libro X, por ejemplo, tiene cierto grado de cohesión externa, ciertos visos de encrucijada, pero ni su cohesión interna ni

su plan de exposición desciplinaria son muy estimables. La aplicación de áreas, por su parte, cuenta con indudables méritos expositivos y didácticos tanto en el libro II como el libro VI, en especial por lo que se refiere al aprendizaje de esta técnica mediante su aplicación a varios casos; pero, desde luego, ni II ni VI son muestras brillantes de coherencia teórica o de cohesión interna. Aún es más notoria la distancia que media entre la eficaz exposición de la técnica de inscripciones y circunscripciones emparejadas en el libro IV y el bajo grado de cohesión interna y de coherencia teórica del libro en su conjunto. Algo parecido cabe pensar de fragmentos como IX, 21-34, cuyas virtudes didácticas y disciplinarias contrastan con el aire de miscelánea (temática y deductiva) que envuelve todo el libro. Por último, no estará de más recordar que los materiales y resultados recogidos a lo largo del tratado no sólo pertenecen a cuerpos teóricos con distinto grado de desarrollo, sino que provienen de tradiciones e investigaciones de mayor o menor antigüedad: unas separadas de Euclides por cerca de dos siglos y otras —como mucho— por apenas dos o tres generaciones. Así cabe llegar a un esquema general de los casos que representan algunos libros de los *Elementos*, por lo que refiere a su tipo o grado de sistematización deductiva, como el esquema siguiente:

		material recogido	
		más antiguo	más reciente
cohesión interna	mayor:	I, VII	V, XIII
	menor:	III, IV, IX	VI, X
cohesión externa	mayor:	I, VII	V, X, XIII
	menor:	III, IX	XII
coherencia teórica	mayor:	I	XIII
	menor:	IV, IX	VI, XII

De este esquema se desprende que no hay una correlación significativa entre el grado de sistematización de estos libros y la antigüedad relativa del material que exponen o elaboran. Tanto los resultados más antiguos como los desarrollos más próximos al autor de los *Elementos* pueden presentarse bajo reconstrucciones más afortunadas (e. g.: I, VII; V, XIII, respectivamente) o menos afortunadas (e. g.: III, IV; VI, X). Por otra parte, ante esos altibajos, no es difícil sacar la impresión de que los *Elementos*, por regla general, cumplen mejor con el propósito de constituir una introducción eficaz y progresiva a las teorías y métodos de la matemática elemental —la geometría, más en particular—, que con las exigencias de lo que habría de ser una reconstrucción deductiva cabal de todo un cuerpo, complejo y articulado, de conocimientos; por lo menos, su rendimiento suele ser más regular y efectivo en relación con el primero que en relación con éstas últimas. Llegados a este punto, ¿qué significación podemos reconocer hoy a la sistematización euclídea?

IV. Sobre la significación axiomática de los «Elementos»

Si miramos a nuestro alrededor para conocer la suerte actual de la obra de Euclides, lo que más nos llamará la atención será lo siguiente: el lenguaje matemático de los *Elementos* es desde hace tiempo una lengua muerta; ha pasado a la historia [32]. Pero, al margen de su lugar de

[32] *Pace* N. Cuesta Dutari —cf. «Tres notabilísimos pasajes de Euclides», *Llull* 4, 6-7 (1981), 35-41—.

reposo bajo el sol en la historia de la matemática, Euclides sigue siendo un personaje vivo o reciclado en muchos libros de filosofía de la ciencia o de metodología deductiva. Se trata, por supuesto, de la supervivencia vicaria que otorgan la fama y la pedagogía. Los *Elementos* sobreviven gracias a la fama en calidad de arquetipo del método axiomático; sobreviven gracias a la pedagogía como la ilustración cabal de una axiomática determinada, a saber: una axiomática «material», «ingenua», «informal», por contraposición a la axiomática «abstracta», «postulacional», «formal» que la geometría empieza a conocer en el curso del siglo XIX a través de Pasch, Peano, Veronese y Hilbert. Así, en la literatura metodológica al uso, no es infrecuente dar con definiciones como ésta:

Σ es una *axiomática euclídea* si y sólo si: *(i)* Σ es un conjunto posiblemente infinito de proposiciones cerrado con respecto a la relación de consecuencia lógica; *(ii)* hay un subconjunto finito Δ cuyos miembros son verdades primeras inmediatas y autovidentes —llamados «axiomas» de Σ—; *(iii)* cualquier otra proposición de Σ que no pertenezca a Δ, es una verdad demostrable a partir de Δ. Condiciones como la verdad primordial y la autoevidencia de los axiomas son las que harían de Euclides el presunto prototipo de esta axiomática.

Pero, por lo regular, las descripciones de este género no pretenden ser una interpretación histórica de Euclides, sino más bien una estipulación didáctica. Se limitan a aducir un tópico metodológico de referencia o de contraste, el primer ejemplar de *homo axiomaticus*, para dar una imagen del progreso de esta especie o para hacer que resalte a contraluz la estructura de la axiomática contemporánea —que, en definitiva, es la que interesa—. Por eso tampoco importa mucho que la fama y la pedagogía crean hablar

de Euclides, cuando en realidad se están refiriendo al programa clásico de axiomatización nacido en el siglo XVII, bajo lemas como el «more geometrico» o «l'esprit de la géométrie»; y crean hablar de los *Elementos* cuando se refieren a su reconstrucción axiomática en los términos de la geometría *euclidiana* del siglo XIX.

Las confusiones y los malentendidos surgen cuando esta retroproyección va más allá de sus fines iniciales, didácticos o analíticos, y pasa a convertirse en una especie de guía o clave interpretativa del sentido de los *Elementos* [33]. Entonces, aun evitando otros puntos discutibles, hemos de abordar una cuestión de fondo: ¿cuál es el significado del término «axiomatización» aplicado a los *Elementos?* Pues, los *Elementos,* ¿acaso no contienen alguna muestra efectiva de axiomatización? Además, su organización deductiva de ciertos cuerpos de conocimiento y la práctica de una forma característica de la demostración matemática ¿no han sido justamente los motivos que han hecho de los *Elementos* el paradigma clásico de la geometría, y han hecho de la geometría misma la ciencia demostrativa por antonomasia? En suma: la «cuestión axiomática» es una de las que determinan nuestra comprensión y valoración histórica de la contribución de Euclides. Plantearé esta cuestión en el marco configurado por tres hipótesis que parecen agrupar las opiniones más frecuentes o características.

[33] Cf., por ejemplo, D. LACOMBE, «L'axiomatization des mathématiques au III siècle avant J. C.», *Thalès* 3 (1949-1950), 37-58; S. S. DEMIDOV, «Évolution, extension et limites de la méthode axiomatique dans les sciences sur l'exemple de la géométrie», *Archives intern. d'histoire des sciences* 90-91 (1970), 3-30; M. GUILLAUME, «Axiomatique et logique», en J. DIEUDONNÉ, dir., *Abrégé d'histoire des mathématiques, 1700-1900,* Paris, 1978; vol. II, págs. 315-430; P. FREGUGLIA, *Fondamenti storici della geometria,* op. cit., 1982.

1.

Podemos empezar considerando dos hipótesis relativamente descentradas: una hipótesis mínima y una hipótesis máxima.

De acuerdo con la hipótesis mínima, Euclides fue un mero recopilador [34]. Su aportación consiste en seleccionar y reunir diversos legados de conocimiento matemático —algunos de ellos organizados deductivamente (la geometría plana, la teoría de la proporción, la aritmética)— en un buen manual, con una exposición más o menos sistemática según el desarrollo alcanzado por la materia tratada.

La hipótesis carece de base documental. La deuda de los *Elementos* con la tradición matemática es indudable. Pero, como hemos podido ver, no es menos cierta su reelaboración tanto del material más lejano como del más próximo, especialmente en lo que se refiere a su organización deductiva. En efecto, son raros los pasajes que parecen reflejar una mera transcripción —quizás IV, 1-15, sobre inscripciones y circunscripciones, IX, 21-34, sobre la aritmética del número par e impar, y muy pocos más—. Ahora bien, por regla general, hemos de reconocer las innovaciones introducidas por Euclides en la forma y disposición del legado matemático anterior —aparte de alguna que otra

[34] E. C. ZEEMAN, en su (1974): «Research, Ancient and Modern» (recogido en *Catastrophe Theory: Selected Papers, 1972-1977,* Reading, Mass., 1979, págs. 605-614), esboza una divertida caricatura de Euclides como adusto compilador y administrador del Departamento de Matemáticas en Alejandría, por contraposición al talento y la originalidad creadora de Eudoxo; puede que Arquímedes tuviera una impresión parecida, no del propio Euclides, pero sí desde luego de algunos de sus discípulos alejandrinos.

contribución original según todos los visos, e. g., la teoría de las paralelas—. Como ya hemos visto, en la atribución de esas innovaciones metodológicas a Euclides coinciden varios testimonios de Pappo, Proclo y los escoliastas. Y no faltan otros elementos de juicio que corroboran esta apreciación, por ejemplo: las muestras de pruebas anteriores que nos han llegado conservadas por Platón y Aristóteles o transcritas por algunos comentadores tardíos (e. g. Simplicio), cuyas diferencias con el tratamiento euclídeo de esos mismos resultados son notorias e inequívocas.

De acuerdo con la hipótesis máxima, los *Elementos* fundan la ciencia del espacio geométrico y son la expresión cabal del método axiomático de prueba que caracteriza la madurez de la demostración matemática griega. En ambos casos, dan así respuesta a problemas cosmológicos y estímulos dialécticos que provienen, en último término, de Elea (Parménides, Zenón, Meliso). La fundación de la geometría como ciencia sistemática y coherente del espacio responde al reto y a las paradojas de los eleatas en torno a la idea de magnitud extensa y otras nociones asociadas, en particular la idea misma de espacio. E. g.: si lo que hay no tuviera extensión, no existiría; ahora bien, de haber una magnitud extensa, ésta sería infinitamente grande e infinitamente pequeña, como consecuencia de su divisibilidad indefinida (Zenón, 29 B 1); así pues, el espacio como medio o marco extenso es una suposición aporética o absurda (29 B 5; cf. *Teeteto* 180c). La expresión del método axiomático en los *Elementos* es, a su vez, la culminación de una tendencia hacia la abstracción conceptual y la autonomía racional de la demostración, tendencia que, asimismo, arranca de la dialéctica eleática —en particular, de su empleo de la reducción al absurdo— y contrasta con las pruebas empíricas, visuales o «materiales», que utilizaban los primeros pitagóricos. Esta interpretación, propuesta y desarrollada por Arpad Szabó desde los años 1950, ha tenido considerable eco entre los historiadores de la filosofía y ha provocado una reacción crítica no menos considerable entre muchos estudiosos de la matemática griega [35]. Los aspectos más discutidos son los que hacen referencia a una deuda crucial de la tradición matemática con la cosmología y la dialéctica de Elea. No hay pruebas documentales que avalen inequívocamente esta conjetura; hay, en cambio, datos elocuentes en su contra (e. g., el testimonio expreso de Aristóteles sobre la despreocupación de los geómetras por las aporías acerca del infinito y del continuo, *Fís.* III 7, 207b27-34). Pero los aspectos que ahora tienen interés son los relativos a la significación de los *Elementos* como fundación de la ciencia del espacio y como espejo del método axiomático.

Para empezar, en los *Elementos* no se encuentran ni una idea general del espacio geométrico —que será, en última instancia, una aportación moderna de la geometría *euclidiana* a la teoría de las paralelas de la geometría de

[35] *Vid.* A. Szabó, «Wie ist die Mathematik zu einer deduktiven Wissenschaft geworden?», *Acta Ant. Acad. Scient. Hung.* IV (1956), Budapest, págs. 109-152; «The transformation of mathematics into deductive science and the beginnings of its foundation on definitions and axioms», *Scripta Mathematica* XXVII 1 y 2 (1964), 27-48 y 113-139; «Greek dialectic and Euclid's axiomatics», en I. Lakatos, ed., *Problems in the Philosophy of Mathematics*, Amsterdam, 1967, págs. 1-8, Discussion, págs. 20-27; (1969) *The Beginnings of Greek Mathematics*, Dordrecht-Budapest, 1978. Por contra, cf. K. Berka, «Was there an Eleatic background to pre-Euclidean mathematics?», en J. Hintikka, D. Gruender y E. Agazzi, eds., *Theory Change, Ancient Axiomatics, and Galileo's Methodology*, Dordrecht-Boston, 1980, págs. 125-131; W. R. Knorr, «On the early history of axiomatics: the interaction of mathematics and philosophy in Greek antiquity», *ibid.*, págs. 145-186.

Euclides—, ni una idea general de magnitud. Éste es un punto claro de contraste de los *Elementos* con la práctica hoy normal del método axiomático. Los primeros pasos de la axiomatización de un campo de conocimientos son la determinación de un dominio de discurso y la especificación de ciertas relaciones estructurales entre los elementos, dentro de ese dominio, bajo la forma de condiciones o cláusulas axiomáticas. Luego cabe considerar los sistemas de objetos capaces de satisfacer tales condiciones, los posibles modelos de esa estructura. Así, podemos entender el espacio euclidiano como un lugar de puntos que cumple unas condiciones axiomáticas como las de infinitud, isotropía, continuidad, etc., aparte de atenerse al postulado (v) o a una condición equivalente. Pero éste no es el medio en el que se mueven los *Elementos*. Los *Elementos* operan de entrada sobre objetos geométricos o matemáticos, unos dados y conceptualizados (en el sentido sugerido por Aristóteles: *APo.* I 10, 76b39-77a2), otros susceptibles de construcción o de hallazgo. El triángulo, el cuadrado, el círculo, etc. son la base de partida para el estudio de las propiedades y las relaciones geométricas (siendo geométricas por ser inherentes a unos objetos geométricos), en vez de ser meras objetivaciones de una red estructural de relaciones o de una idea de espacio como lugar o conjunto de puntos. Por eso las definiciones euclídeas suelen ser expresiones de nociones intuitivas, caracterizadas por separado y más pendientes a veces de su carga tradicional que de su cometido como nudos de un entramado teórico. En suma, los *Elementos* están lejos de significar una ciencia del espacio —más aún: el antiguo pensamiento griego, tan dado a discutir sobre el espacio cosmológico y el lugar físico, no llega a plantearse expresamente un concepto general y preciso de espacio geométrico—.

Las dificultades para ver en los *Elementos* un espécimen axiomático crecen si recordamos su composición teórica y metódica relativamente heterogénea. Un supuesto clásico de la axiomatización de un cuerpo de conocimientos es su homogeneización como un conjunto de enunciados cerrado bajo la relación de consecuencia lógica. Pero en la composición de los *Elementos* no sólo cuenta esta alineación deductiva de los sucesivos problemas y teoremas; no sólo se trata de *hacer saber* tales o cuales resultados. También tienen particular importancia las construcciones diagramáticas y el entrenamiento en ciertos métodos; también se trata de *saber hacer,* de verificar con los objetos y las figuras geométricas una especie de «experimentos mentales» cuyo éxito viene garantizado por unas condiciones de construcción determinadas. Por lo demás, en el capítulo anterior ya hemos podido advertir la existencia de algunas otras desviaciones de carácter didáctico o de carácter conceptual que impiden al orden de exposición discurrir exactamente emparejado con un orden de deducción puramente lógico.

Aún hay más razones para dudar de la sistematización cabalmente axiomática del tratado de Euclides. La verdad es que el rendimiento de los principios euclídeos (definiciones, postulados, nociones comunes) deja bastante que desear en este sentido. Ni cada uno de estos principios es un supuesto necesario ni todos ellos forman un conjunto suficiente para la deducción de los cuerpos teóricos que toman a su cargo. Por ejemplo, las Deff. I, 1 de *punto,* y VII, 1 de *unidad* son «parásitos» filosóficos dentro de la tradición matemática; las Deff. I, 2-7; I, 19, o V, 3, también carecen de empleo propiamente dicho; hay incluso términos que tras ser objeto de definición, nunca más vuelven a mencionarse (e. g.: «oblongo [*heterómekes*]», «rom-

bo [*rhómbos*]», «romboide [*rhomboides*]», en la Def. I, 22; «sector [*tomeús*]», en la Def. III, 10).

En principio, cabría entender estos defectos como fallos o descuidos circunstanciales: también Euclides se nos duerme a veces. Pero si se toman en cuenta los aspectos antes considerados, estas deficiencias acusan más bien limitaciones del tipo de «axiomatización» *sui generis* que presentan los cuerpos más sistemáticos del tratado. No parece casual, en el marco de la estrategia deductiva de los *Elementos*, el hecho de pasar por alto un postulado que prevea la existencia de puntos de intersección de rectas con círculos, y de círculos con círculos, cuando es una existencia dada en su misma construcción diagramática y esta disposición diagramática no sólo es un medio de representación sino que además puede funcionar, llegado el caso, como un medio tácito de inferencia. Tampoco será casual la ausencia de unos supuestos de orden en la teoría de la proporción y de unos supuestos operacionales en la aritmética, si no hay un concepto general de magnitud, ni hay un concepto general de número, ni hay una conceptualización expresa de ciertas relaciones básicas como, sin ir más lejos, la de medir-a o ser-medido-por. En suma, estas y otras deficiencias por el estilo no parecen revelar tanto la inconsciencia o falta de lucidez del bueno de Euclides como una limitación interna de los propios *Elementos:* falla en ciertos momentos el nivel requerido de abstracción y de conceptualización, y falta en general una perspectiva estructural axiomática. Así pues, no creo que los *Elementos* constituyan una muestra cabal del método axiomático [36]. Aunque más tarde fueran tomados como pretexto

[36] En un sentido análogo se han pronunciado diversos estudios. Unos más bien parciales, como los de A. SEIDENBERG, «Did Euclid's *Elements* book I develop geometry axiomatically?», *Archive for History of Exact Sciences* 14 (1974-1975), 263-295; G. G. GRANGER, *Essai d'une philosophie du style*, París, 1988², cap. II, págs. 24-42 en particular. Otros, en cambio, referidos al conjunto de los *Elementos*, como I. MUELLER, «Euclid's *Elements* and the axiomatic method», *British Journal for the Philosophy of Science* 20-3 (1969), 289-309, y sobre todo *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*, op. cit., 1981. Una valoración similar del alcance de la axiomatización entre los antiguos griegos (Euclides —*Óptica*—, Arquímedes y Tolemeo en particular), se encuentra en P. SUPPES, «Limitations of the axiomatic method in ancient Greek mathematical sciences», en J. HINTIKKA y otros, *Theory Change, Ancient Axiomatics...*, op. cit., 1980, págs. 197-213.

y aun como emblema de la sistematización axiomática, la verdad es que sólo significan una especie de «axiomatización» en ciernes, un preludio de lo que luego irá logrando en tal sentido la tradición moderna, desde las visiones programáticas del «more geometrico» del siglo XVII hasta las refundiciones axiomáticas efectivas de la geometría euclidiana en el siglo XIX. Es posible que esta tradición moderna se imagine a veces estar explicitando la teoría y la estructura que los *Elementos* ya tenían originariamente, sólo que en un estado implícito y práctico. Pero en realidad está reconstruyendo ciertas partes del legado euclídeo de los *Elementos* en un nuevo contexto: sobre un nuevo terreno filosófico, con una nueva perspectiva metódica e incluso con otros materiales científicos y otros medios matemáticos.

2.

Descartadas las hipótesis anteriores sobre la significación axiomática de los *Elementos*, todo parece devolvernos a una hipótesis tradicional: no debe extrañarnos que la sistematización del tratado de Euclides sea una «axiomatiza-

ción» *sui generis*, pues consiste justamente en la materialización práctica de la teoría de la ciencia demostrativa propuesta por Aristóteles en los *Segundos Analíticos*. Esta interpretación puede sostenerse con distintos grados de entusiasmo. En plena euforia se llega a sugerir que Euclides aplica la teoría de la deducción de Aristóteles, *i.e.* su lógica silogística [37]. Menor es el entusiasmo y mayor la discreción de quienes se limitan a asumir una tesis familiar para sacar conclusiones. La tesis asegura: 1) en el desarrollo de la matemática hasta Eudoxo, los griegos crearon el primer ejemplo de una ciencia que estudia «axiomáticamente» sus elementos; 2) Aristóteles, precisamente, fue el que dio la primera descripción general de esta ciencia; 3) tan bien lo hizo Aristóteles que su teoría de la ciencia demostrativa representa «*la* concepción griega» de la demostración y «*la* concepción griega» de la sistematización axiomática [38]. La

[37] *Vid.* I. M. Bocheński, «The general sense and character of modern logic», en E. Agazzi, ed., *Modern Logic. A Survey*, Dordrecht-Boston, 1981, pág. 11. Los intentos expresos de calzar las pruebas euclídeas en la horma del silogismo de Aristóteles se remontan a su comentador Alejandro de Afrodisia (e. g., *In Top. Comm.* 14, 21 ss.). Mucho más tarde, entre los aristotélicos de Padua del Cinquecento, volvió a prender la discusión de la reducibilidad de la prueba geométrica al silogismo. Una muestra del éxito que cabe esperar en la empresa es la reducción que perpetra Clavio de la proposición I, 1 en su edic. (1574): *Euclidis Elementorum libri XV*, Roma, 1589², I 1 Scholium, I, págs. 76-77; para colmo de ingenuidad, remata el intento con esta expresión de fe y de esperanza; «Non aliter resolvi poterunt omnes aliae propositiones non solum Euclidis, verum etiam caeterorum Mathematicorum» (loc. cit., pág. 77).

[38] La exposición clásica de esta tesis es el artículo de H. Scholz (1930), «Die Axiomatik der Alten », reimpreso en su *Mathesis Universalis* (edic. a cargo de H. Hermes, F. Kambartel, J. Ritter), Basilea, 1969², págs. 27-44. Puede que represente el tópico más extendido sobre la ciencia demostrativa griega.

conclusión de todo esto se sigue fácilmente: los *Elementos* de Euclides son entonces la muestra más lograda y reconocida de esta concepción greco-aristotélica. Sea como fuere, el caso es que aun los intérpretes menos entusiastas se ven obligados a comparar el programa metodológico de los *Analíticos* con el «pórtico axiomático» de los *Elementos*. Tal comparación es un hábito tradicional que se remonta a Proclo [39].

A primera vista, la correspondencia entre los diversos tipos de principios de la ciencia demostrativa de los *Analíticos* y las definiciones, postulados y nociones comunes de los *Elementos*, resulta sumamente tentadora. Cabe imaginar una distribución correlativa semejante a ésta:

	Analíticos	*Elementos*
principios comunes [*protá, koiná, axiómata*]		nociones comunes
principios específicos	definiciones [*hóroi*]	definiciones
	hipótesis [*hypothéseis*]	postulados.

[39] La literatura comparativa que han suscitado los *arkhaí* aristotélicos y los euclídeos es tan abundante como desigual en valor. Aparte de la prolija información recogida en T. L. Heath, *The Thirteen Books...*, ed. cit., 1962², 1, págs. 117-124, hay observaciones de interés en los trabajos de H. D. P. Lee, «Geometrical method and Aristotle's account of first principles», *Classical Quarterly* 29 (1935), 113-124; K. Von Fritz, «Die Arxai in der griechischen Mathematik», *Archiv für Begriffsgeschichte* 1 (1955), págs. 13-103 (luego incluido en *Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft*, Berlín, 1971); A. Gómez-Lobo, «Aristotle's hypotheses and the Euclidean postulates», *Metaphysics* 30 (1977), 111-123; J. Hintikka, «Aristotelian axiomatics and geometrical axiomatics», en J. Hintikka y otros, eds., *Theory Change, Ancient Axiomatics...*, op. cit., 1980, págs. 133-144; W. R. Knorr, «On the early history of axiomatics...», art. cit., 1980; W. Leszl, «Mathematics, axiomatization, and hypotheses», en E. Berti, ed., *Aristotle on Science. The Posterior Analytics*, Padua, 1981, págs. 271-328.

Una correlación de este tipo supone cuando menos que, para empezar, la distribución aristotélica es una clasificación clara e inequívoca; que, en segundo lugar, algo parecido cabe pensar de la tripartición de Euclides; que, en fin, ambas guardan entre sí las correspondencias debidas. Por desgracia, todas estas suposiciones resultan discutibles. Aquí bastará considerar el caso de la distribución euclídea. Se trata de un simple listado de supuestos repartidos bajo los consabidos rótulos: ***hóroi, aitémata, koinaì énnoiai.*** No voy a entrar ahora en las licencias terminológicas que los matemáticos griegos se permitían a propósito de estas y otras maneras de llamar o indicar esos supuestos básicos [40]. La cuestión es: ¿hay algún criterio que justifique esta distribución tripartita? Como sólo aparece así en los *Elementos*, habremos de atenernos ante todo a su uso efectivo dentro de este contexto.

Proclo, en sus *Comentarios al libro I,* se hace eco de varios criterios al respecto. Uno, de clara impronta aristotélica, distingue entre los principios comunes del conocimiento científico en general o de una familia de ciencias, e. g., las nociones acerca de las relaciones de igualdad y desigualdad, y los principios propios o específicos de un cuerpo determinado de conocimientos, es decir: los postulados en el caso de la geometría *(Com.* 182, 6-14). Un problema planteado por este criterio es qué hacemos con la noción común (iv*) que, al margen de su formulación general, se remite a una relación geométrica de coincidencia y, a veces, suple un postulado de superposición (e. g., en I, 4, 8) o representa una definición de congruencia. Otro problema es cómo explicamos el uso de las definiciones a las que suele confiarse la especificación de los campos de conocimiento cubiertos por los *Elementos* (no hay postulados para las magnitudes, ni para los números; de ahí que en ocasiones una definición haya de cumplir el cometido que hoy asignaríamos a un postulado matemático, e. g. la Def. 4 del libro V en la prueba del lema X, 1).

Otro criterio, seguramente desgranado de la tradición matemática, insiste en la distinción entre nociones comunes o axiomas y postulados: los axiomas están más indicados en la prueba de teoremas, pues allí se trata de establecer ciertos atributos o relaciones inherentes a los objetos geométricos; en cambio, los postulados están más indicados en la solución de problemas, habida cuenta de su mayor afinidad con los procedimientos de construcción *(Com.* 178, 12-179, 8, 181, 5-10). Este criterio no resulta muy eficaz por la relativa indiferenciación, al menos en la fase capital de la demostración [*apódeixis*], entre los teoremas y los problemas; por la existencia de investigaciones híbridas que se plantean una construcción para demostrar las propiedades o relaciones subsiguientes (e. g., la contrucción de sólidos regulares dentro de una esfera en la línea

[40] Podían utilizar, antes de Platón, denominaciones tan genéricas como *arkhaí* o *hypothéseis;* Aristóteles da fe asimismo del uso de *axiómata* y, lo que es más importante, de la diversidad de contextos de empleo de todos estos términos (contextos filosóficos, dialécticos, matemáticos). Para una visión general de esta variedad de usos y contextos, cf. los estudios clásicos de B. EINARSON, «On certain mathematical terms in Aristotle's logic», *American Journal of Philology* 57 (1936), 35-54, 151-172; K. VON FRITZ, «Die ARXAI in der griechischen Mathematik», *Archiv für Begriffsgeschichte* 1 (1955), págs. 13-103. Después de Euclides, hay cierta tendencia a servirse de *hypokeístho* para introducir definiciones y otras premisas primordiales, y de *etḗstho* para introducir postulados, pero esta costumbre no constituye una norma; Arquímedes, por ejemplo, vuelve al uso genérico de *lambanómena* (asunciones) para separar estos supuestos básicos del cuerpo de resultados derivados de ellos. En todo caso, la terminología «axiomática» no llega a estar fijada en una época tan tardía como la de Proclo.

de XIII, 13-17); y en fin por la existencia de resultados que no responden ni a una ni a otra condición, como los «porismas» en el sentido de cuestiones que se proponen hallar algo que no descansa en una construcción ni está simplemente sujeto a una determinación teórica (e. g., el hallazgo del máximo común divisor en VII, 2-3 o el hallazgo de la medida común máxima en X, 3-4).

Un tercer criterio, quizás elaborado a partir de Aristóteles y de Espeusipo, entiende que los axiomas son principios absolutamente dignos de crédito por sí mismos y no susceptibles de prueba, ciertos e indiscutibles, mientras que los postulados son asunciones corroborables por alguna suerte de demostración o de derivación *(Com.* 182, 21-183, 13). Pero este criterio tampoco funciona con la limpieza que cabría esperar: esa consideración de los postulados parece desmentida por el empeño en demostrar el postulado (v), no precisamente para convalidar su estatuto de postulado, sino para revocarlo y mostrar su calidad de teorema. Por otro lado, ¿cuál sería entonces el papel que toca desempeñar a las definiciones?

De las definiciones, y de su identificación frente a los postulados podría ocuparse un nuevo criterio quizás relacionado con algunas discusiones en el ámbito de la Academia platónica: las definiciones expresan propiedades esenciales de los objetos matemáticos y se mantienen al margen de los compromisos genéticos o constructivos, más propios de los postulados. Pero lo cierto es que hay definiciones genéticas (e. g., las definiciones XI, 14, 18 y 21, que describen respectivamente la esfera, el cono y el cilindro como sólidos generados por figuras planas que rotan alrededor de un eje fijo); hay definiciones que cumplen la tarea de un postulado; y hay, por contra, postulados que revisten la forma de condiciones definitorias (e. g., el postulado

(iv), que decreta la igualdad de todos los ángulos rectos, o el postulado (v), que sienta el criterio euclídeo de las paralelas).

En general, no hay criterios que justifiquen la presencia efectiva de cada principio en uno de los tres grupos distinguidos por Euclides, o criterios que permitan una redistribución cabal de los casos más problemáticos. Por ende, la selección de los principios y supuestos «axiomáticos» de los *Elementos* no parece abrir una perspectiva de comparación muy prometedora. Así pues, no es extraño que las comparaciones entre la base «axiomática» de la teoría de los *Analíticos* y el «pórtico axiomático» de los *Elementos* vengan a resultar tanto menos decisivas y concluyentes cuanto más finas y ponderadas sean.

Pero, al margen de este punto concreto de comparación, cabe intentar un balance global de las similitudes y diferencias que median entre la teoría aristotélica y la práctica euclídea de la demostración axiomatiforme. Las coincidencias más salientes se pueden cifrar en tres:

a) Hay una distinción neta entre las asunciones primeras y las proposiciones probadas, exigida por la noción técnica de demostración [*apódeixis*] que comparten Aristóteles y Euclides: toda demostración a partir de unas premisas debe remitir en última instancia a unos principios primeros e indemostrables, salvo que el proceso de deducción sea circular o se retrotraiga al infinito y la serie de las pruebas resulte, en su conjunto, infundada (Aristóteles, *APo.* I 3, 72b5-23; Proclo, *Com.* 75, 10-76, 4).

b) Esas proposiciones primordiales constituyen además principios de organización deductiva de cuerpos de conocimiento.

c) Se da por supuesta la autonomía teórica y disciplinaria de cada uno de esos cuerpos que cuente con unos

principios propios y específicos de conceptualización y de organización, aunque también haya de compartir ciertas nociones o axiomas comunes que tienen vigencia en cualquier ciencia demostrativa o en una familia de ciencias, e. g., la de las ciencias matemáticas de la magnitud, el número, la proporción. Si dentro de esta familia una ciencia tiene principio específicos, es una ciencia básica (e. g., la geometría, la aritmética); si ha de tomarlos en préstamo de otra, es una ciencia derivada (e. g., la óptica, la teoría musical).

Las diferencias más acusadas pueden contraerse parejamente a otras tres:

a') Si el interés aristotélico por los principios tiene claras connotaciones filosóficas, epistemológicas e incluso dialécticas, los supuestos básicos de los *Elementos* representan más bien un precipitado de la tradición matemática (a veces impregnada de motivos filosóficos como la distinción entre la unidad y el número o la distinción entre los objetos geométricos, ligados a postulados de construcción, y los objetos aritméticos, sólo susceptibles —al parecer— de definición), o son una reelaboración de este legado matemático; responden a una selección determinada por el curso de la investigación en ciertos ámbitos matemáticos y por la forma de exposición de ciertos resultados básicos en esas áreas; tal vez este compromiso con una tradición un tanto dispar y heterogénea haya contribuido a que los principios euclídeos rehúyan un criterio unívoco y uniforme de identificación y clasificación.

b') Si el programa aristotélico se centra en el análisis de las condiciones de la demostración científica que consiste en un *hacer-saber-que* algo es así y no puede ser de otra manera, las pruebas euclidianas también consisten en ocasiones en un *hacer-saber-cómo* se obtiene determinado tipo

de resultados o se resuelve determinada clase de problemas. Señal de este talante no sólo doctrinal y expositivo, sino operativo y práctico es la diferente función que pueden cumplir las definiciones y las hipótesis de los *Analíticos*, por un lado, y las definiciones y los postulados de los *Elementos*, por otro lado: en la teoría aristotélica no pasarán de ser premisas de una argumentación concluyente, mientras que en la práctica euclídea desempeñan un papel importante en la fase de preparación y conformación metódica de la prueba (en la *kataskeué)*, y las premisas de la fase demostrativa propiamente dicha [*apódeixis*] suelen ser más bien las nociones comunes o las proposiciones previamente establecidas.

c') Si la idea de demostración y de ciencia demostrativa no deja de estar marcada en Aristóteles por una lógica subyacente silogística, las pruebas euclídeas proceden con un rigor informal irreducible a los sistemas de análisis lógico disponibles en ese medio antiguo como el aristotélico o el estoico. No es extraño que, con el curso del tiempo, Posidonio, y tras él Galeno, reconozcan, junto a las demostraciones «categóricas» de corte lógico aristotélico o las demostraciones «hipotéticas» cortadas por el patrón lógico estoico, otro tipo de demostración, peculiar de los geómetras, que discurre en términos de relación [*katà tò prós ti*] y se funda en ciertos axiomas [*ék tinon axiomáton tèn aitìan ískhein systáseos*] [41].

Estas coincidencias y diferencias fácilmente apreciables, así como las relaciones un tanto complejas que el programa aristotélico de la demostración pudiera tener, y que

[41] *Vid.* GALENO, *Eysagogè dialektiké* xvi 1, 5; cf. también xvii, xviii. Hay una edición bilingüe (en griego y español) a cargo de M. H. OTERO y A. RAMÍREZ, *Iniciación a la dialéctica*, México, 1982.

la práctica euclídea de la deducción tiene de hecho, con la tradición matemática griega —sin ir más lejos, con la confección de *Elementos* matemáticos—, sitúan la comprensión histórica de los *Elementos* de Euclides en una perspectiva más amplia y más fecunda que la contemplada de ordinario por la hipótesis tradicional. En definitiva, si las hipótesis anteriores, la mínima y la máxima, pecaban de ceguera o miraban en una dirección equivocada, esta hipótesis tradicional de una correspondencia entre las ideas de Aristóteles y los usos de Euclides adolece más bien de miopía relativa.

3.

La comparación de la práctica euclídea con el programa aristotélico de la ciencia demostrativa puede rendir, al fin, un último servicio: el de darnos una clave sustancial del significado de la sistematización de Euclides. Esta clave consiste en la diferencia de «espíritu» o de intención que distingue la teoría de los *Analíticos* de la práctica de los *Elementos,* como si constituyeran dos fases de desarrollo de la idea griega de demostración.

La motivación capital de la teoría de la ciencia demostrativa preconizada por los *Analíticos* consistía en declarar qué es lo que hay que conocer o asumir en orden a forjar o entender una demostración concluyente y reconocerla como tal. La idea determinante en este contexto era la idea misma de demostración. Y una demostración venía a ser sustancialmente aquel «discurso racional [*lógos*] que se inscribe con el conocimiento en la mente del que aprende y es capaz de defenderse a sí mismo» (por decirlo con palabras de Platón, aunque procedan de otro contexto: *Fedro* 276a). Este concepto de demostración es el que alienta en

los análisis ulteriores (lógicos, epistemológicos, metodológicos) que conducen a Aristóteles a lo que podríamos llamar «un punto de vista axiomático», e. g., a la distinción entre principios indemostrables y proposicionales demostrables a partir o a través de ellos, a la subdistinción entre los principios comunes y las tesis propias o específicas de un campo de conocimientos, etc. [42]. En cambio, el propósito distintivo de la sistematización deductiva de los *Elementos* es, a mi juicio, la elucidación y la organización de ciertos campos matemáticos básicos —merced a una oportuna selección y disposición de los *Elementos*—, hasta su conversión en cuerpos autónomos y concluyentes de conocimientos. Así pues, no cabe negar un talante axiomatiforme a los *Elementos* de Euclides: la puesta en limpio y la reconstrucción sistemática de un conjunto de conocimientos, con miras a su constitución como una teoría científica autosuficiente, es, desde luego, uno de los motivos que se juzgan característicos de la axiomatización. El problema de si este talante aparece con Euclides o había surgido anteriormente (e. g., en los tratados de *Elementos* que circulaban por la Academia platónica, o en otro tipo de contribuciones, como la teoría de la proporción de Eudoxo), es una cuestión ahora irrelevante. Lo cierto en cualquier caso es que la idea de demostración propuesta por los *Analíticos* se extiende en los *Elementos* a todo un cuerpo de conocimientos: el «*lógos* que se inscribe en la mente del que aprende y es capaz de defenderse a sí mismo» no es ya una prueba concluyente o una demostración en particular, sino toda una teoría o un cuerpo de conocimientos.

---

[42] *Vid.* L. Vega, *La trama de la demostración...*, op. cit., 1990, II, § 5.3; en II, § 5.4 y IV § 3.3, se consideran las relaciones entre esta idea aristotélica de demostración y la práctica euclídea de la prueba matemática.

En este sentido, bien podemos ver en Euclides una primicia o un anuncio paradigmático de la demostración axiomática clásica. Claro está que su tratado no responde con igual fidelidad en todos sus extremos a este planteamiento, de modo que no podremos atribuir un talante axiomatiforme a su conjunto como si representara un sistema compacto y homogéneo de elementos matemáticos. Pero cabe reconocer este sentido a algunas de sus partes, en particular a sus bases geométricas. Por lo demás, también es sintomático que la «escuela alejandrina» de Euclides se dedique a consagrar y perfeccionar la geometría de los *Elementos* en esa misma línea, en la línea de una disciplina autónoma, prioritaria y compuesta por una teorías deductivas informalmente autosuficientes.

En conclusión, es aventurado hablar de unas deudas directas y concretas de Euclides con los *Analíticos*. Cierto es que la noción técnica de *apódeixis* tiene un cuño aristotélico; o que la doble dimensión metodológica y disciplinaria de la exposición racional de una materia científica también está prevista en la teoría aristotélica de la ciencia demostrativa. Pero no es menos cierto que el rigor demostrativo de las pruebas geométricas era, asimismo, una demanda del propio desarrollo matemático a principios del siglo IV (según testifica Platón a propósito de Teodoro y Teeteto); o que esa doble motivación ya inspiraba la confección de los tratados de *Elementos* matemáticos (como sugiere Proclo). Y, en fin, si Aristóteles, fundado en estos precedentes y en otros motivos y desarrollos complementarios (filosóficos, dialécticos) de la cultura ateniense de la 1.ª mitad del siglo IV, supo ofrecer un programa de lo que llamaríamos «el punto de vista axiomático», Euclides, a su vez, bien pudo aprovecharse de todas esas fuentes de inspiración, incluidos ciertos puntos del programa aristotélico (con resonancia en Alejandría), para dar un paso más en esta dirección hasta lograr de hecho la organización deductiva autónoma —o, si se quiere, una «axiomatización» *sui generis*— de ciertos cuerpos de conocimiento matemático.

V. EL TEXTO DE LOS «ELEMENTOS». VERSIONES Y EDICIONES

El examen detallado de las versiones y ediciones de los *Elementos* es una tarea que no entra en mis propósitos y, desde luego, está más allá de mis limitaciones. John Murdoch ha llegado a decir que ninguna otra obra científica, filosófica o literaria, en su largo caminar desde la Antigüedad hasta el presente, ha caído bajo la pluma de un editor con tanta frecuencia [43]. Por lo menos, cabe asegurar que ninguna otra fuente clásica de conocimiento ha tenido una historia tan rica y variopinta de versiones, ediciones, epítomes y comentarios. Recordemos además que los *Elemen-*

[43] *Vid.* J. MURDOCH, «Euclid: Transmission of the *Elements*», en C. GILLISPIE, dir, *Dictionary of Scientific Biography*, ed. cit., 4, pág. 437. Cf. la voluminosa compilación bibliográfica sobre Euclides de P. RICCARDI, *Saggio di una bibliografia euclidea* (Mem. R. Acad. de l'Instituto di Bologna; en 5 partes), Bolonia, 1887-1893. También cabe hacerse una idea a través de C. THOMAS-SANFORD, *Early Editions of Euclid's Elements*, Londres, 1926 (84 títulos desde 1842 hasta 1600); M. STECK, «Die geistige Tradition der frühen Euklid-Ausgaben», *Forschungen und Fortschritte* 31 (1957), 113-117 (60 títulos más hasta 1600); F. J. DUARTE, *Bibliografía: Euclides. Arquímedes. Newton*, Caracas, 1967 (recoge sólo ediciones impresas hasta 1961: 123 corresponden a Euclides y cubren las págs. 19-101 de las 163 que hacen el total del libro). En fin, otros títulos pueden verse en G. KAYAS, *Vingt-trois siècles de tradition euclidienne. (Essai bibliographique)*, École Polyt. L.P.N.H.E. X-77, París, 1977, y en M. STECK, *Bibliographia Euclideana*, Hildesheim, 1981.

tos, con todas sus virtudes, no fueron recibidos como un texto sagrado, sino como un patrimonio perteneciente a una tradición viva, dispuesta a mejorar y añadir lo que al parecer hiciera falta. Las interpolaciones empiezan a circular como moneda corriente desde el siglo III d. C. A juzgar por sus referencias, Sexto Empírico a finales del siglo II aún disponía de una versión correcta, mientras que Jámblico (hacia 250-325) tiene que vérselas con una versión corrupta. Sin embargo, durante algún tiempo debieron de seguir existiendo versiones relativamente fieles, pues nuestros mejores manuscritos, como ha observado Heiberg, se ven libres de algunas interpolaciones presentes en el texto utilizado por Jámblico o en versiones empleadas por otros comentadores tardíos. Sea como fuere, en el siglo IV se acentúan las modificaciones inspiradas en motivos de orden didáctico: por ejemplo, hay una tendencia a normalizar el lenguaje matemático del tratado, a insertar escolios, a suplementar o explicar diversos pasajes; en suma, se empiezan a desarrollar los aspectos disciplinarios y escolares que harán de él un manual básico de geometría. Así quedó sellada su suerte histórica.

La forma principal de transmisión de los *Elementos* se aviene a la pauta que parecen seguir los textos científicos más afortunados del legado griego: versiones griegas manuscritas en unciales o en minúsculas; traducciones del griego al árabe en el siglo IX; traducciones latinas de las versiones árabes en el XII; impresión de versiones y exposiciones en latín a finales del siglo XV; poco después, edición de versiones latinas a partir del griego y aparición de la *editio princeps* del propio texto griego; más tarde, versiones en lenguas vernáculas y, por fin, edición crítica del texto en las últimas décadas del siglo XIX. Pero aun dentro de este marco general, la suerte de los *Elementos* merece

una consideración más concreta. Esta consideración, aquí, no pasará de ser una visión panorámica y superficial [44]. Por motivos prácticos, seguiré la convención de distinguir cuatro fases características de la historia del texto: el Euclides griego, el árabe, el latino y el vertido en las lenguas vernáculas modernas.

1. *El Euclides griego*

La normalización primera y básica del texto de los *Elementos* es la edición de Teón de Alejandría, hacia el año 370 d. C. Nuestro Teón no es precisamente un gramático alejandrino, sino un matemático: está mucho menos interesado en la recuperación o depuración del texto que en la significación disciplinaria del tratado. De la edición de Teón procede la tradición central de las versiones, exposiciones y comentarios de Euclides. Los manuscritos y copias de esta tradición suelen hacer referencia expresa a su procedencia de Teón [*ek tês Théonos ekdóseos, apò synoustiôn toû Théonos*] y tienen algunas adiciones características; por ejemplo, la segunda parte de VI, 32 (añadido confesado por el propio Teón en su comentario al *Almagesto* de Tolemeo, I, pág. 201), VII, 22 y probablemente VII, 20, amén de ciertos lemas y de varios porismas. Los ejemplares teoninos son, naturalmente, de muy diversa calidad.

[44] *Vid.* J. L. HEIBERG, «Prolegomena critica» en la ed. cit. de HEIBERG-MENGE, *Euclidis opera omnia* V, 1888, págs. xxiii-cxiii (en la edic. STAMATIS (1977), V, págs. xvi-lxxxix); HEIBERG, «Paralipomena zu Euklid», *Hermes* 38 (1903), 46-74, 161-201, 321-356; T. H. HEATH, ed. cit, 1926², I, págs. 46-63, 75-113; J. MURDOCH, «Euclid: Transmission...», loc. cit., 1981, págs. 437-459; D. H. FOWLER, *The Mathematics in Plato's Academy*, op. cit., 1987, págs. 202-20.

En dos que no podrían contarse entre los mejores, los mss. Veneciano 301 y Parisino Gr. 2343, —y en una cuidada versión italiana de Zamberti—, se funda precisamente la *editio princeps* de los *Elementos* de Simon Grynaeus (Basilea, 1633; aunque, según Stamatis, ésta sería la fecha de la 2.ª impresión y la 1.ª correspondería al año 1630). Sobre la edición de Grynaeus, complementada con una influyente versión latina de Commandino y con el uso de otros mss. en ciertos pasajes concretos, D. Gregory realiza la primera edición completa de las obras de Euclides en griego y en latín (Oxford, 1703). En 1808, François Peyrad advierte que un ms. que Napoleón se había traído de Roma a París como parte del botín, el Vaticano Gr. 190, no contenía las referencias y adiciones teoninas además de presentar otras diferencias notables con las muestras de la tradición (e. g., la presencia de XIII, 6). Peyrad empezó a tener en cuenta este ms. para corregir las ediciones teoninas en su edición trilingüe (griego, latín, francés) de los *Elementos* (París, 1814-1818); pero se mantuvo sustancialmente dentro de la línea marcada por las ediciones de Grynaeus y Gregory. Sólo con la edición de E. F. August (Berlín, 1826-1829), este ms. independiente se convierte en una baza principal para vindicar y establecer el «texto original» —suponía August— de Euclides.

La recuperación del Euclides «prístino» es, desde luego, una ilusión excesiva. El texto de los *Elementos* que hoy cabe considerar como el más aproximado al original es el establecido por la edición crítica de Heiberg (en la ed. cit. de J. L. Heiberg y H. Menge, *Euclidis opera omnia*, I-IV, Leipzig, 1883-1886). La edición de Heiberg descansa en el cotejo de 7 manuscritos principales y en el uso adicional de un palimpsesto del British Museum (Add. 17211) que contiene varios fragmentos del libro X y alguno del libro XIII. También toma en cuenta las noticias existentes en comentarios y referencias de Pappo, Sexto Empírico, Proclo, Simplicio, así como abundantes escolios (recogidos en el vol. V, Leipzig, 1888). Los mss. son los siguientes:

Dentro de la tradición teonina:

F: ms. Florentino XXVIII, 3, Biblioteca Laurentina; procede originariamente del siglo X, aunque ha sido revisado por una mano posterior (del siglo XVI).
B: ms. Bodleiano, D'Orville X; procedente del siglo IX.
V: ms. Vienés, Philos. Gr. 103; procede probablemente del siglo XII.
b: ms. Boloñés, 18-19, Biblioteca Comunale; procedente del siglo XI.
p: ms. Parisino, Bibliothèque Nationale 2466; procedente del siglo XII.
q: ms. Parisino, BN 2344; procedente del siglo XII.

Independiente de la edición de Teón:

P: ms. Vaticano, Gr. 190; procedente del siglo X.

Heiberg abordó la colación de este material con todos los medios puestos a su disposición por la crítica textual del siglo XIX, sin ahorrar la discusión de diversos criterios en orden a la complementación, coordinación y conciliación de estos mss. En general, suele considerar mejores o más fiables P y F, pero esta confianza nunca es completa, menos aún absoluta. Por otra parte, suele dar prioridad a estas fuentes sobre otras correspondientes a las versiones y los comentarios de la tradición árabe [45].

[45] La preeminencia de la tradición árabe fue vindicada por M. KLAMROTH, «Ueber den arabischen Euklid», *Zeitschrift der Deutschen morgenländischen Gesellschaft* 35 (1881), pág. 310, en particular. Cf. J. L. HEI-

Heiberg examinó posteriormente («Paralipomena zu Euklid», art. cit., 1903), otro material; en especial, los comentarios de Herón, transmitidos por Al-Nayrīzī, y algunos fragmentos de antiguos papiros (Herculanensis, 1061; Oxyrhinchus I, pap. 58, xxix; Fayûm, pap. 96, ix). Este examen contribuyó a precisar los rasgos de la tradición central de los mss. derivados de la edición de Teón: según todos los visos, responden a un arquetipo diferente del representado por P y, quizás, también diferente del texto utilizado por algunos comentadores próximos a Euclides, como Herón; cabe sospechar, así mismo, que el arquetipo de P es anterior al teonino. F es el ms. teonino que más se acerca a P; por esta circunstancia, amén de otros detalles, como el cuidado puesto en su confección, F podría considerarse el ms. más importante dentro de esa tradición. Pero no estamos en condiciones de fijar un orden jerárquico, una red de relaciones o un árbol genealógico de los mss. teoninos.

La edición de Heiberg ha sido revisada finalmente por E. S. Stamatis, *Euclidis Elementa* (Leipzig, Teubneriana, 1969-1973, vols. I-IV; vol. V. *Prolegomena critica,* Libros XIV, XV *Scholia,* Leipzig, 1977). Del examen de Stamatis, según confesión propia, no resulta sino la confirmación del texto establecido por Heiberg *(vid.* su «Additamentum Praefationis», I, págs. x-xi). Las mejoras de la edición revisada consisten sustancialmente en la inclusión de las referencias griegas a Euclides («Testimonia», I, págs. xii-xxx) y en la adición de un apéndice II, dentro del mismo vol. I, que recoge fragmentos de papiros (Michigan iii 143, Fayûm 9, Oxyrh. 29). La mayor diferencia apreciable es el carácter más conservador de la edición de Stamatis. Por ejemplo, Stamatis admite sin reservas la noción común: «Y dos rectas no encierran un espacio», que Heiberg considera una interpolación; Proclo la había descartado expresamente alegando que se debía poner coto al desmedido afán de los comentadores por multiplicar los axiomas sin necesidad *(Com.* 184, 8; 196, 23).

BERG, «Die arabische Tradition der *Elemente* Euklid's», *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 29 (1884), 1-22; HEIBERG, «Prolegomena critica», loc. cit., 1888, págs. xcvi-xcvii (en la edic. de STAMATIS (1977), págs. lxxiv-lxxvi); T. L. HEATH, ed. cit., 1926^2, I, págs. 81-82.

Según esto, nuestra base documental acredita la existencia de dos arquetipos distintos: el correspondiente a la edición de Teón y el correspondiente al ms. P —del que también hay huellas, aunque ocasionalmente, en algún otro ms., como el ms. V—. A estos dos arquetipos quizás cabría sumar otros tres, cuya existencia sólo cabe conjeturar por algunos indicios. Uno podría desprenderse del comentario de Herón recogido en las glosas de Al-Nayrīzī. Otro podría inferirse de ciertos fragmentos latinos antiguos, como los atribuidos a Censorino o los transcritos en el palimpsesto de Verona (Biblioteca Capitolare), y de los llamados *excerpta boetiana* conservados en manuales de los agrimensores romanos y en dos «Geometrías» atribuidas a Boecio. El tercero, en fin, correspondería a la tradición de las versiones árabes, habida cuenta de algunas divergencias con los mss. citados (incluido el ms. b, que desde XI, 36, hasta el final del libro XII se distancia significativamente de sus congéneres para aproximarse a fuentes árabes).

2. *El Euclides árabe*

La fase árabe de la transmisión de los *Elementos* parece haber sido no sólo variopinta sino, desde el punto de

vista matemático incluso, sumamente fecunda y creadora. Los *Elementos* no dejan de sugerir excursos filosóficos a autores con escaso interés por la matemática misma (e. g., Avicena, Al-Razi, Averroes). Pero, sobre todo, constituyen un foco de estudios especializados y dan lugar a una rica literatura euclidiana cuyos géneros son: traducciones propiamente dichas [*naql*], epítomes o compendios [*ikhtiṣār, mukhtaṣar*], recensiones [*taḥrīr*], enmiendas [*iṣlāḥ*], comentarios [*tafsīr, shurūḥ*]. Una recensión capital fue, por ejemplo, la de Al-Ṭūsī —en 1248 había completado una *Taḥrīr Uṣūl Uqlīdis* sobre los 15 libros—. Mayor importancia tuvo aún el comentario de Al-Nayrīzī (muerto hacia 922); difundido en la versión latina de Gerardo de Cremona, no sólo fue una preciosa fuente de información sobre los comentarios helénicos, sino que propició ciertos sesgos típicos de la *commentatio* medieval de Euclides (e. g., la tendencia a distinguir y probar por separado los casos particulares de una proposición general, la tendencia al uso de ilustraciones numéricas). También son memorables los comentarios de Al-Jayyānī (cuya comprensión de la definición V, 5 de la proporcionalidad carece de parangón en el Occidente cristiano hasta Isaac Barrow, siglo XVII), Al-Kindī (muerto hacia 873), Al-Fārābī (870-950), Alhazen (965-1039), Omar Jayyām (muerto hacia 1123). Destacan dos núcleos temáticos en torno a los cuales suelen girar los comentarios: por un lado, la fachada «axiomática» del libro I, donde recibe especial atención la prueba del controvertido postulado (v); por otro lado, la teoría de la proporción del libro V y las magnitudes irracionales del libro X.

Pero importan más las traducciones propiamente dichas. Hay noticias de una versión inicial de Al-Ḥajjāj (que vive hacia 786-833) —quizás la primera traducción árabe—, seguida de otra del mismo autor en la que se puede ver el precedente de los compendios que ofrecen los *Elementos* como un manual matemático claro, convincente y bien dispuesto para el uso escolar. La versión inicial de Al-Ḥajjāj fue denominada «Hārūnī» en honor del califa Hārūn al-Rashīd (cuyo nombre no es menos honrado por los *Cuentos de las mil y una noche),* y se ha perdido; de la segunda versión sólo se conserva un ms. incompleto (Leiden, Or. 399, 1) que comprende los libros I-VI y algunas definiciones del VII, pero no faltan referencias a ella en otros mss. (e. g. en el ms. árabe 907 de la Real Biblioteca de El Escorial). Isḥāq b. Ḥunain (muerto en 910) hizo otra traducción, hoy también desaparecida, revisada luego por Thābit b. Qurra (826-901). Esta versión Isḥāq-Thābit se conserva en unos 20 mss. y se considera más fiel a una fuente griega. Por último, al traductor del comentario de Pappo al libro X, Abū Uzman al-Dimashqī (siglo x), se le atribuye otra versión parcial de los *Elementos;* hoy no queda de ella más noticia que esta referencia del *Fihrist* o catálogo bio-bibliográfico de Al-Nadīm [46].

[46] El *Fihrist* («Índice»), compuesto hacia 987, es una preciosa fuente de información sobre la cultura árabe coetánea; *vid.* H. SUTER, *Abhandlugen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften* VI, Leipzig, 1892. La versión AL-ḤAJJĀJ ha sido editada junto con los manuscritos de AL-NAYRĪZĪ por J. L. HEIBERG, R. O. BESTHORN *et. al., Codex Leidensis 399, 1: Euclidis Elementa ex interpretatione al-Hadschdschadschii cum commentariis al-Nairīzī*, Copenhague, 1893-1932. En 1937, C. BAUDOUX anunciaba una edición de la versión ISḤĀQ-THĀBIT que no llegó a aparecer. Hay, sin embargo, una edición rusa (a cargo de J. AL-DABBAG, L. M. KARPOVA, B. A. ROSENFELD *et al.)* de las obras matemáticas de THABIT IBN QURRA, *Nauchnoe nasledstvo,* Moscú, 1984. Sobre la transmisión árabe, pueden verse los arts. antes citados de KLAMROTH (1881) y HEIBERG (1884); pero más accesibles y actualizados son los informes de G. DE YOUNG, «The Arabic textual traditions of Euclid's *Elements*», *Histo-*

La versión de Al-Hajjāj de los XV libros consta de 468 proposiciones (I-XIII: 452; una ausencia característica es, por ejemplo, la de I, 45) y presenta una marcada orientación didáctica (pruebas de casos particulares, ejemplos numéricos). La versión Ishāq-Thābit comprende a su vez 478 proposiciones (I-XIII: 462), dispuestas en ocasiones en un orden de prueba diferente al de al-Hajjāj; también acusa cierta normalización escolar del lenguaje y del uso de figuras. A pesar de sus diferencias, hay indicios de alguna relación entre ellas: puede que la revisión de Thābit tuviera en cuenta además las versiones de Al-Hajjāj. Se aproximan en las definiciones y en los enunciados de los teoremas, así como en los libros XI-XIII en general; por otro lado, abundan las contaminaciones en las muestras existentes de una y otra tradición, e incluso cabría pensar que ciertos mss. (Leiden, 399, 1; Leningrado, C 2145; El Escorial, 907) representan una especie de versión mixta. Con todo, la suerte histórica de una y otra línea de transmisión hacia el Occidente latino fue un tanto dispar. La tradición Ishāq-Thābit sólo tuvo al parecer una incidencia marginal, a través principalmente de la traducción latina de Gerardo de Cremona; en cambio, la versión de Al-Hajjāj alcanzó a tener mayor repercusión merced al poderoso influjo del comentario de Al-Nayrīzī, a la versión latina de Hermann de Carinthia y, sobre todo, gracias a sus afinidades con

ria Mathematica 11 (1984), 147-160; P. KUNITZ, «Findings in some texts of Euclid's *Elements*», en M. FOLKERTS, U. LINDGREN, eds., *Mathemata. Festschrift für Helmuth Gericke,* Stuttgart, 1985, págs. 115-128; R. LORCH, «Some remarks on the Arabic-Latin Euclid», en C. BURNETT, ed., *Adelard of Bath,* Londres, 1987, págs. 45-54. Para hacerse una idea del marco general de estas contribuciones, *vid.* A. P. YOUSCHKEVICH, (1961): *Les mathématiques arabes (VIIIᵉ-XVᵉ siècles),* Paris, 1976.

la tradición adelardiana, el cauce central por el que discurrieron las versiones medievales en latín [47].

3. *El Euclides latino*

La suerte de los *Elementos* en latín conoce tres etapas principales: una corresponde a la cultura romana; otra, a la cultura medieval escolástica; la tercera, en fin, a la cultura renacentista y académica posterior. Comprende desde versiones y traducciones hasta adaptaciones y compendios, pasando por diversas formas de exposición y comentario.

3.1. *Tu regere imperio populos, Romane, memento / Hae tibi erunt artes...* La verdad es que tan poco hicieron los romanos por las matemáticas, que suele considerarse digno de memoria el hecho de que Cicerón se permitiera una alusión a Euclides *(De oratore* III 132), mucho antes de que a alguien se le ocurriera traducir su tratado. También es probable que nadie llegara a poner mucho empeño en la tarea, pues hoy sólo nos quedan versiones muy fragmentarias (por lo demás, los romanos ilustrados sabían griego o podían contar con un lector de griego). Según Casio-

[47] Las afinidades de *Adelardo I* con la tradición Al-Hajjāj aparecen resaltadas en M. CLAGETT, «The Medieval Latin translations from the Arabic of the *Elements* of Euclid, with special emphasis on the versions of Adelard of Bath», *Isis* 44 (1953), pág. 19, y en H. L. BUSARD, ed., *The First Latin Translation of Euclid's Elements Commonly Adscribed to Adelard of Bath,* Toronto-Ontario, 1983, págs. 5-6. Las afinidades de *Adelardo I* con la tradición Isāhq-Thābit son destacadas, en cambio, por P. KUNITZ, «Findings in some texts...», art. cit., 1985, págs. 118-119. Puede que esta duplicidad sea un motivo más para pensar en una pronta compenetración o contaminación entre ambas líneas de transmisión de los *Elementos*.

doro (*Institutiones* II 6, 3), Boecio llevó a cabo una traducción de Euclides —el propio Boecio lo había declarado en carta a Teodorico (*Variae* I 45, 4)—. Sin embargo, los restos actuales de la versión de Boecio no pasan de ser extractos procedentes de otras fuentes: una recensión en ese libro II de las *Institutiones* de Casiodoro; una colección de materiales de geometría aplicada a la agrimensura; algunos fragmentos de dos *Geometrías* atribuidas a Boecio (una compuesta en dos libros y la otra en cinco). Comprenden en suma las definiciones, postulados y axiomas de los libros I-V; los enunciados de casi todas las proposiciones de I-IV; las pruebas de I, 1-3. A estos *excerpta* boecianos cabe añadir un fragmento con las definiciones, postulados y axiomas, atribuido al astrólogo Censorino y recogido en el *De nuptiis Philologiae et Mercurii* de Marciano Capella (VI 708 ss.), así como algunos fragmentos de los libros XII-XIII hallados en un palimpsesto de la Biblioteca Capitolare de Verona [48].

3.2. En el latín medieval, la situación cambia espectacularmente gracias a la atención que Euclides va ganando en el *Quadrivium* y en algunas facultades de Artes pero, sobre todo, gracias a la providencial mediación de la cultura árabe. En los saberes griegos, Alá fue durante algunos siglos el más sabio.

A. Hay, no obstante, alguna versión directa del griego. Contamos, por un lado, con dos minúsculos fragmen-

[48] *Vid.* los «excerpta boetiana» recogidos en N. BUBNOV, ed. (1899), *Gerberti opera mathematica*, Hildesheim, 1963; App. II, págs. 161-166 (otros falsamente atribuidos en págs. 166-174; referencias de los siglos VI-XV a opúsculos geométricos bajo el nombre de Boecio, App. III, págs. 180-196). *Vid.* también M. FOLKERTS, ed., *«Boethius» Geometrie II: Ein mathematisches Lehrbuch des Mittelalters*, Wiesbaden, 1970; M. GEYMONAT, ed., *Euclidis latine facti fragmenta Veronensia*, Milán, 1964.

tos (I, 37-38; II, 8-9) en un ms. de Munich (Univ. 2. 757) procedente quizás del siglo X y atribuido erróneamente a Boecio. Pero, por fortuna, disponemos además de una traducción anónima de los *Elementos* I-XV, compuesta en torno a 1170 a partir de un ms. teonino que hoy no está identificado: si por un lado haría recordar B, por otro lado, acusaría contaminaciones no teoninas (a este tipo de recensiones mixtas pertenece por ejemplo, según Busard, el ms. S, iii - 5, de El Escorial). La traducción tiene en ocasiones una sintaxis más griega que latina y sigue la norma de versión literal *de verbo ad verbum* (palabra por palabra) propuesta por Burgundio de Pisa a mediados del siglo XII. Cabe suponer que su autor, o al menos uno de sus autores, es la misma persona que el traductor anónimo siciliano del *Almagesto* de Tolemeo; al menos da pruebas de cierta competencia matemática y agudeza lógica (e. g., en el uso de la llamada *consequentia mirabilis* —si de la presunta negación de una proposición se sigue esta proposición misma, tal proposición queda sin más establecida—, para la demostración de IX, 12) [49].

B. El conocimiento de Euclides en el medioevo escolástico descansa en las traducciones latinas hechas durante el siglo XII a partir de versiones árabes. El cauce central de difusión de los *Elementos* fue la tradición adelardiana. Para empezar, se prodigó en un número de copias manuscritas relativamente sorprendente (los mss. conocidos hoy

[49] *Vid.* J. MURDOCH, «Euclides Graeco-Latinuis. A hitherto unknown Medieval Latin translation of the *Elements* made directly from the Greek», *Harvard Studies in classical Philology* 71 (1966), 249-302. Cf. la edición de H. L. BUSARD, *The Mediaeval Latin Translation of Euclid's Elements Made Directly from the Greek*, Stuttgart, 1987; Busard defiende las hipótesis de un ms. griego contaminado y de dos traductores distintos, *vid.* su «Introduction», págs. 2-4 y 9-10, respectivamente.

pasan con creces del medio centenar); por añadidura, constituyó la base de los comentarios de los siglos XIII y XIV que dieron la medida del conocimiento de Euclides en Occidente hasta el siglo XVI (e. g., el comentario atribuido a Alberto Magno y, sobre todo, el influyente comentario de Campano de Novara) [50].

Desde el trabajo clásico de Claggett (1953), las versiones pertenecientes a la tradición adelardiana se han clasificado en tres grupos: *Adelardo I, Adelardo II, Adelardo III*, que aglutinan las principales clases de variantes.

Adelardo I es, según todos los visos, la primera versión latina de los *Elementos* (incluidos los libros XIV y XV) [51]. Su atribución al conocido traductor medieval Adelardo de Bath (cuya madurez se sitúa hacia 1142-1146) no deja de

[50] *Vid.* el trabajo clásico de M. CLAGETT, «The Medieval Latin translations...», art. cit. (1953), págs. 16-44 (recogido en sus *Studies in Medieval Physics and Mathematics*, Londres, 1979, viii); así como J. MURDOCH, «Euclides Graeco-Latinus...», art. cit., 1966, y «The Medieval Euclid: Salient aspects of the translations of the *Elements* by Adelard of Bath and Campanus of Novara», *Revue de Synthèse* 89 (1968), 67-94. Otras indicaciones se encuentran en P. KUNITZ, «Findings in some texts...», art. cit., 1985; H. L. BUSARD, «Some early adaptations of Euclid's *Elements* and the use of its Latin translations», en M. FOLKERTS, U. LINDGREN, eds., *Mathemata...*, op. cit., 1985, págs. 129-164; R. LORCH, «Some remarks on the Arabic-Latin Euclid», art. cit., 1987; M. FOLKERTS, «Adelard's versions of Euclid's *Elements*», en C. BURNETT, ed., *Adelard of Bath*, op. cit., 1987, págs. 55-68. El art. antes citado de Murdoch, «The Medieval Euclid...», 1968, contiene importantes observaciones sobre el comentario de Campano; por lo que se refiere al atribuido a Alberto Magno, *vid.* P. M. TUMMERS, «The Commentary of Albert on Euclid's *Elements of Geometry*», en J. A. WEISHEIPL, ed., *Albertus Magnus and the Sciences. Commemorative Essays 1980*, Toronto, 1980, págs. 479-499.

[51] *Vid.* H. L. BUSARD, ed., *The First Latin Translation of Euclid's Elements Commoly Adscribed to Adelard of Bath*, Toronto-Ontario, 1983.

ser dudosa. Pero, en cualquier caso, parece haber sido compuesta en la 1.ª mitad del siglo XII, en torno a 1130-1140, y es una versión anterior a las caracterizadas como *Adelardo II* y *Adelardo III*. También se discute el peso relativo de las fuentes árabes más notorias, la tradición Al-Hajjāj y la tradición Ishāq-Thābit, en su composición; desde luego, comparte la omisión de I, 45, característica de la versión Al-Hajjāj y de la recensión de Al-Tūsī; sea como fuere, saltan a la vista los frecuentes arabismos (e. g.: «elmuain»/rombo, «elmukaab»/cubo, «alkora»/esfera, «elaalem»/gnomon) y las vacilaciones de un latín en proceso de adaptación a las necesidades de una terminología geométrica (e. g. líneas «inconiunctive» o «equistantes» por «equidistantes»; proporción «repetitione tripla», «ter repetita», «tri repetita» por «triplicata») [52]. Otro rasgo interesante es el que presenta uno de los mss. de este grupo (Bibliothèque Nationale, París, Lat. 16201): anuncia la distribución medieval común entre las definiciones, postulados, nociones comunes y enunciados por un lado, como originales del propio Euclides, y por otro lado las pruebas de las proposiciones, como un *commentum* adicional —que podía ser atribuido a Teón o a Al-Nayrīzī o, incluso, reconocido más tarde como una contribución de Campano montada sobre una versión de tipo *Adelardo II*—. Cabe mencionar, en fin, otro rasgo de la versión *Adelardo I* que resultará típico de la actitud medieval ante los *Elementos:* consiste en marcar expresamente las partes constituyentes de la prueba. Las fórmulas distintivas de *Adelardo I* vie-

[52] En la ed. cit. de H. L. BUSARD, *The First Latin Translation...*, Addendum I, 1983, págs. 391-396, puede verse una tabla comparativa de los arabismos presentes en *Adelardo I* y *II*, y en la versión de Hermann de Carinthia; en el Add. II, págs. 396-399, ciertas peculiaridades de su terminología latina.

nen a ser: *nunc demonstrandum est* (a veces *nunc signandum est*), para señalar la proposición en cuestión; *exempli gratia*, para hacer referencia al caso particular considerado; *rationis causa* para la demostración propiamente dicha; *hoc est quod demonstrare intendimus*, como cláusula final.

La versión *Adelardo II* no es una traducción como *Adelardo I*, sino más bien una versión abreviada, un compendio, que puede atribuirse casi con seguridad al propio Adelardo de Bath: la habría compuesto antes del período 1142-1146 en el que al parecer redacta su obra sobre el astrolabio, pues allí se refiere a esta versión de los *Elementos*. Este sumario o compendio de los *Elementos* pudo haberse elaborado bien a partir de *Adelardo I*, bien a partir de algún texto árabe (contiene arabismos ajenos a *Adelardo I*, e. g., «helmuaerife»/trapecio); en todo caso, muestra cierta familiaridad con los *excerpta* de Boecio e incorpora algunos grecismos (e. g., «orthogonius»/rectángulo, «ambligonius»/obtusángulo, «oxigonius»/acutángulo, «gnomon», «parallelogrammum», «ysosceles»). *Adelardo II* no recoge las demostraciones propiamente dichas de los *Elementos*, sino que se limita a dar indicaciones sumarias sobre el camino que debería seguir el que deseara hacerlas. Muestra así un comportamiento medieval característico ante el legado matemático: la asimilación de algunos resultados especialmente relevantes a través de glosas y digresiones donde las consideraciones analíticas y metodológicas sobre los supuestos y el curso de la prueba se conjugan con las directrices didácticas.

En *Adelardo III* no encontramos una traducción ni una versión en sentido propio, sino una paráfrasis o una edición —*editio specialis* la denomina Roger Bacon—. Se trata de una reelaboración que parte de los enunciados de

Adelardo II para desarrollar a su aire una demostración relativamente cumplida de las proposiciones correspondientes. Sin embargo, no renuncia a la expresión de intereses metodológicos (e. g., a la distinción de las partes de la prueba) ni a una perspectiva didáctica. Antes bien, incluye una introducción con material medieval sobre las artes liberales y la clasificación de las ciencias, además de comentar algunas definiciones. Sus fuentes parecen ser nociones procedentes de Proclo —halladas en los comentarios árabes—, ideas de los siglos XI-XII en torno a las artes liberales y otro material sobre unidades métricas —quizás del tratado *De disciplina geometriae* de Gerberto—.

La tradición adelardiana, en especial *Adelardo II*, y la reelaboración de Campano constituyeron la vía principal de incorporación de los *Elementos* a la cultura escolástica y determinaron su suerte en este marco histórico. Con ellos el texto de los *Elementos* adquirió un perfil peculiar. Hay algunas omisiones notorias, e. g., no sólo la de I, 45, sino la de VI, 12, donde se sienta la existencia de un cuarto término proporcional (Campano la incorpora como una *additio* a la proposición VI, 11, mientras que la tradición adelardiana en general la introduce como postulado en el libro I). Hay confusiones graves, como la suscitada en torno al concepto de proporcionalidad: la definición 5 del libro V se desplaza para dejar paso a una noción espuria de proporcionalidad continua [53]. Tampoco faltan, en fin, las ilustraciones numéricas y aun extramatemáticas de las proposiciones geométricas, sea con fines didácticos, sea con

---

[53] *Vid.* la ed. cit. de H. L. BUSARD, *The First Latin...*, 1983, pág. 145. Cf. MURDOCH, «The Medieval language of proportions: elements of the interaction with Greek foundations and the development of new Mathematical techniques», en A. C. CROMBIE, ed., *Scientific Change*, Londres, 1963, págs. 237-271.

otros propósitos especulativos o prácticos (e. g., musicales, filosóficos, astronómicos, métricos). Con todo, el rasgo más llamativo y determinante es la suplementación del contenido de los *Elementos* a través de glosas que, naturalmente, se hacen eco de los intereses y las preocupaciones del mundo escolástico medieval: entre esos intereses figuran ciertas formas de exposición didáctica y de análisis lógico; entre estas preocupaciones, los problemas generados por la concepción del infinito y del continuo [54].

C. Al margen de la tradición adelardiana, disponemos de otra versión relativamente libre de un texto árabe en la línea Al-Hajjāj. Se atribuye a Hermann de Carinthia

[54] Sobre la índole de los comentarios medievales, *vid.* J. MURDOCH, «The Medieval Euclid...», art. cit., 1968. Una muestra singular son las *Quaestiones* de ORESME, *vid.* H. L. BUSARD, ed., *Quaestiones super geometriam Euclidis (Janus,* Suppl. III), Leiden, 1961; cf. la recensión de J. MURDOCH en *Scripta Mathematica* 27 (1964), 67-91, así como V. P. ZUBOV, «Autour des *Quaestiones super geometriam Euclidis* de Nicole Oresme», *Medieval Renaissance Studies* 6 (1968), págs. 150-172. En E. GRANT, *A Source Book of Medieval Science,* Cambridge (Mass.), 1974, pueden verse interesantes extractos de Campano, § 27, págs. 136-150, y de Oresme, § 28, págs. 150-159. Los comentarios medievales del legado matemático griego tuvieron, a mi juicio, secuelas un tanto divergentes: por un lado, minaron la estructura sistemática de la geometría como un cuerpo deductivo de conocimiento al centrarse en el análisis dialéctico de ciertas pruebas como cuestiones particulares y derivar hacia problemas conceptuales filosóficos y científicos de diverso orden; por otro lado, su intención de explicitar los supuestos determinantes de la fuerza demostrativa de tales pruebas les llevó a veces a nuevas construcciones sistemáticas, por ejemplo a la declaración de los postulados de la aritmética —no considerados siquiera por los libros VII-IX de los *Elementos*—. *Vid.* la versión de E. GRANT de las definiciones, postulados y axiomas propuestos por la *Arithmetica de* JORDANO DE NEMORE a mediados del siglo XIII, en el recién citado *A Source Book in Medieval Science,* § 21, págs. 102-103 en particular.

(cuya madurez se sitúa hacia 1140-1150) [55]. Comparte muchos arabismos con las versiones adelardianas, a los que añade algunos otros de cosecha propia (e. g., «aelman geme»/nociones comunes, «almukadina»/axioma, «chateti»/líneas —en I, 1—); también emplea ciertos términos latinos peculiares (e. g., «umbo» por «gnomon», «mutus» por «irrationalis» o «surdus»). A la luz de algunas coincidencias con *Adelardo II* cabe conjeturar que Hermann se apoyara en esta versión, pero no deja de incluir pruebas completas. Por lo demás, también comienza con una introducción en la que expone los «siete fundamentos de toda la disciplina», a saber: *preceptum* (el enunciado de la proposición); *exemplum* (el caso considerado en particular); *alteratio* (la apertura de una prueba indirecta o de una reducción al absurdo); *collatio* (confrontación); *divisio* (disyunción de las cuestiones); *argumentum* (prueba); *finis* (conclusión en la que todos convienen). La fundamentación en la que está pensando Hermann es, por consiguiente, una fundamentación dialéctica.

D. Por último, disponemos de otra versión del siglo XII que no sólo difiere de la tradición adelardiana, sino de la versión de Hermann y de la matriz habitual Al-Hajjāj; es posible que haya sido compuesta sobre la base de un texto de la tradición Ishāq-Thābit que integra elementos de Al-Hajjāj (una versión mixta como la representada por el ms. escuriarense árabe 907). Se trata de la traducción de Gerardo de Cremona (1114-1187), el más prolífico de los traductores de Toledo, asistido en esta ocasión por un

[55] *Vid.* H. L. BUSARD, ed., *The Translation of the Elements of Euclid from the Arabic into Latin by Hermann of Carinthia (?),* Leiden, 1968 (libros I-VI); Amsterdam, 1977 (libros VII-XIII).

ayudante mozárabe («Gallipus mixtarabus»)[56]. En general, es considerada la versión más acorde con la tradición griega de entre las versiones arábigo-latinas; pero no tuvo ni de cerca el influjo de las versiones adelardianas. Está libre de los arabismos que cunden por las demás versiones coetáneas y, entre otros rasgos distintivos, adopta *Et due recte non comprehendunt superficie* como última noción común, no como postulado, según venía siendo costumbre en las versiones adelardianas y en Hermann. Sin embargo, también se complace en una introducción donde presenta las partes de la prueba; son éstas: *propositum* (lo propuesto); *exemplum; contrarium* (ejemplo que corresponde a una reducción al absurdo); *dispositio; differentia* (distinción entre lo posible y lo imposible); *probatio; conclusio*.

3.3. *Versiones latinas renacentistas y académicas.* — La suerte de los *Elementos* en el latín de los humanistas y en el latín universitario o académico de los siglos XV y posteriores se refleja en cuatro momentos relativamente señalados: cabría considerar los dos primeros como fases sucesivas de un proceso de depuración en la versión latina del tratado; los otros dos obedecen a motivos menos relacionados con el texto euclídeo y más pendientes de los desarrollos y usos disciplinarios de la geometría euclidiana.

a) El primer momento corresponde a las últimas décadas del siglo XV y las primeras del siglo XVI. Viene marcado por dos acontecimientos: uno es la publicación de la reelaboración de la versión adelardiana realizada por Campano a mediados del siglo XIII: la publica E. Ratdolt (*Preclarissimum opus elementorum Euclidis megarensis una cum commentis Campani perspicacissimi in arte geometrica*, Venecia, 1492) no sin esfuerzo —*non sine maximo labore*— debido a las complicaciones técnicas que entonces suponía la impresión ajustada de los diagramas geométricos. Constituye la primera edición impresa de Euclides —unos cincuenta años antes de que aparezca la *editio princeps* del texto griego—. Esta circunstancia y la reconocida competencia matemática de Campano contribuyeron a ampliar el ámbito de influencia de esta versión de los *Elementos*, a pesar de que no se ignoraban sus raíces árabes. El segundo acontecimiento fue la aparición de una nueva traducción hecha directamente a partir del griego por B. Zamberti (*Euclidis megarensis philosophi platonici mathematicaum disciplinarum Janitoris... elementorum libros xiii cum expositione Theonis insignis mathematici...*, Venecia, 1505). Zamberti emplea algún ms. teonino no identificado (que, según Heiberg, no parece ser uno de los mejores) y descalifica la edición de Campano, *interpres barbarissimus;* de hecho, Campano no había trabajado sobre una fuente griega. Zamberti, por su parte, consigue una traducción propiamente dicha de los *Elementos*, libre además de los arabismos de la tradición adelardiana; pero insiste en el error de atribuir las pruebas, la *expositio* o *commentum* de las proposiciones, al bueno de Teón. Poco después, Luca Pacioli reedita a Campano (Venecia, 1509) y, corrigiendo ciertos errores que atribuye a los copistas, trata de vindicarlo como *interpres fidelissimus*. Las secuelas de esta querella fueron algunas ediciones de los *Elementos* que recogían tanto la versión de Campano como las pruebas de «Teón-Zamberti» (e. g., la edición de J. Lefèvre, París, 1516)[57].

[56] *Vid.* H. L. BUSARD, ed., *The Latin Translation of the Arabic Version of Euclid's Elements Commonly Adscribed to Gerard of Cremona*, Leiden, 1984.

[57] *Vid.* H. WEISENBORN, *Die Uebersetzungen des Euklid durch Campano und Zamberti*, Halle, 1882; T. L. HEATH, *The Thirteen Books...*, ed. cit., 1926², I, págs. 97-100.

b) La traducción de F. Commandino *(Euclidis elementorum libri XV, una cum scholiis antiquis,* Pesaro, 1572) señala el paso a una fase superior de este proceso de depuración y rigor creciente en la versión latina de los *Elementos.* Commandino utiliza sabiamente el material a su disposición: mss. teoninos y escolios extraídos de un ms. del tipo de Vaticano Gr. 192, la *editio princeps* de Grynaeus, comentarios de diversas fuentes; por lo demás, no se priva de añadir notas y observaciones propias. Su traducción es la base de la mayoría de las versiones posteriores hasta que aparece la edición de Peyrard (1814-1818); en particular, es la adoptada como versión latina de los *Elementos* en la edición de Gregory (Oxford, 1703) y es la asumida por las influyentes versiones latina e inglesa de Simson (Glasgow, 1756). Por añadidura, la edición de Commandino incluye en sus «Prolegomena» una especie de manifiesto metodológico sobre la índole de la geometría y el rigor de la prueba geométrica, aparte de consideraciones históricas y filosóficas que hoy pueden parecernos curiosas, aunque por entonces no dejaban de ser relativamente tópicas (e. g., la referencia a una matemática anterior al Diluvio universal, recogida por la tradición bíblica de los caldeos, hebreos y egipcios, que habiendo sido trasplantada por Tales y Pitágoras alcanza en el medio heleno un nivel superior de desarrollo gracias a la contribución de generaciones sucesivas de matemáticos griegos [58]); sin embargo, también tiene el mérito de despejar la confusión tradicional entre

[58] Una memoria histórica similar es la que muestra Tycho Brahe en su *De disciplinis mathematicis,* compuesto en 1574. Sobre el significado de estas historias, *vid.* N. JARDINE, *The Birth of History and Philosophy of Science,* Cambridge-Nueva York, 1984, cap. 8, págs. 261 ss. en particular.

el autor de los *Elementos* y su homónimo filósofico de Mégara, así como la atribución de las pruebas a Teón.

c) Al margen de esos procesos de edición y versión, otro momento del Euclides latino académico está representado por las exposiciones ampliamente comentadas de los *Elementos,* en su calidad de tratado básico de la geometría tradicional. La edición de C. Clavio: *Euclidis Elementorum libri XV* (Roma, 1574, 1589^2) constituye una muestra harto elocuente: a las 468 proposiciones euclídeas agrega otras 671 de cuño propio, amén de numerosos corolarios, escolios y excursos, hasta concluir «in universum ergo 1234 propositiones in nostro Euclide demonstrantur». Este derroche de erudición le valió a Clavio el renombre de «Euclides de nuestro siglo» entre sus contemporáneos; por lo demás, su sombra se alargará hasta el lejano Oriente, donde propicia una versión china de los libros I-VI (1603-1607) de su discípulo y consocio M. Ricci, con la colaboración de Xu Guangki [59]. A la misma Compañía que Clavio y Ricci pertenece G. Saccheri, cuyo *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Milán, 1733) brilla con luz propia dentro del

[59] En torno a la significación y el marco histórico de la contribución de Clavio, puede verse F. A. HOMANN, «Christopher Clavius and the Renaissance of Euclidean Geometry», *Archivum Historicum Societatis Jesu* 52 (1983), 233-246. Por lo demás, esa versión china inicial fue continuada en 1857 por A. Wylie y Li Shanlan, pero ya no sobre la base de la edición de Clavio, sino a partir de versiones inglesas, en particular la de Simson. Las versiones y la recepción chinas de la geometría euclídea son un caso sumamente ilustrativo de las dificultades lingüísticas y conceptuales que puede envolver su trasplante a otra cultura muy dispar y no «formada» o «educada» en unos usos metodológicos semejantes a los griegos —aunque los chinos dispusieron desde antiguo de sus propias pruebas matemáticas, e. g., de la prueba intuitiva del «teorema de Pitágoras»—; *vid.* al respecto J. C. MARTZLOFF, *Histoire des mathématiques chinoises,* París, 1988, págs. 104 ss., en especial.

género de exposiciones-comentarios, sobre todo por su discusión del postulado de las paralelas [60]. En fin, a las labores de este tipo se suman ciertos motivos de orden filosófico para que ésta sea también la hora en que Euclides, figura paradigmática del difundido «esprit de la géométrie», parezca enseñar lógica además de geometría.

d) Los *Elementos* conocen una suerte bien distinta cuando y donde las aplicaciones prácticas o los motivos pedagógicos prevalecen sobre las pretensiones de rigor en la traducción o sobre las pretensiones de rigor en el cultivo de una disciplina demostrativa. Pues el latín académico deviene asimismo una vía de conversión y reducción de los *Elementos* al formato de un manual claro, intuitivo, básico. Aunque estos usos tienen una vieja raigambre —e. g., en los *curricula* tanto escolásticos de la Edad Media como humanistas del Renacimiento—, un ejemplar digno de mención por su índole y su descendencia es Andrè Tacquet: *Elementa geometriae planae et solidae* (Amberes, 1654). Comprende los libros I-VI, XI-XII; trae pruebas reducidas a su expresión más asequible; se recrea en corolarios y escolios útiles desde un punto de vista didáctico y práctico; alcanza considerable difusión en el siglo XVIII y todavía cuenta 20 reediciones en las primeras décadas del siglo XIX.

[60] El interés de los historiadores de la lógica y de las matemáticas por Saccheri no sólo se hizo patente en el primer tercio de este siglo, sino que ha renacido en las dos últimas décadas. Basten como síntomas los trabajos de A. DOU, «Logical and historical remarks on Saccheri's Geometry», *Notre Dame Journal of Formal Logic* XI - 4 (1970), 385-415; I. ANGELELLI, «On Sacheri's use of the «Consequentia mirabilis», en *Akten II. Intern. Leibniz-Kongresses*, Wiesbaden, 1975, págs. 19-26; G. C. GIACOBBE, «La *Lògica demonstrativa* di Gerolamo Saccheri», en *Atti del Convegno Intern. di Storia della Lògica*, Bolonia, 1983, págs. 265-270; y, en fin, la reciente reimpresión de G. B. HALSTED, ed., *Gerolamo Saccheri's Euclides Vindicatus (I)*, 1920, Nueva York, 1986.

De otras muchas versiones escolares que dan en expurgar pruebas cuando no en expoliar proposiciones de la «Geometría de Euclides», más vale no hablar.

4. *El Euclides de las lenguas vernáculas*

Sólo mencionaré unas pocas versiones y traducciones en algunas lenguas próximas.

La versión de N. Tartaglia da lugar a la primera edición italiana (Venecia, 1543); Tartaglia procede sobre la base de Campano y Zamberti, «secondo le due tradittioni». El propio Commandino trasladó al italiano (Urbino, 1575) su versión latina anterior. En italiano también se encuentran dos ediciones importantes en el presente siglo: las dos son traducciones del texto griego establecido en la edición de Heiberg. Una es la realizada por F. Enriques y colaboradores: *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna* (Roma-Bolonia, 1925-1935); sus consideraciones hermenéuticas son sugerentes, pero acusan las limitaciones de la época y del horizonte explorado hasta entonces por los pioneros de la historiografía de la ciencia griega (entre los que puede contarse el propio Enriques). Otra traducción más reciente y ajustada es la de A. Frajese y L. Maccioni, *Euclide. Gli Elementi* (Turín, 1970), cuyas indicaciones y notas también tienen notable interés.

La primera edición francesa de los *Elementos* aparece con la edición de P. Forcadel (París, 1564): comprende los libros I-IX y su autor se mueve en la órbita del afamado dialéctico humanista Petrus Ramus (que en su *Scholae mathematicae*, Francfort, 1559, había declarado su amor por Euclides al tiempo que lo sometía a los chispazos de una crítica metodológica impertinente —hay amores imposibles—). Una versión muy influyente fue la adapta-

ción de ocho libros por parte de C. F. Milliet de Chales (Lyon, 1672). En nuestros días, tiene relieve la edición de J. Itard de los libros VII-IX: *Les livres arithmétiques d'Euclide*, París, 1961, así como su reedición de la versión francesa de Peyrard (1819): *Les oeuvres d'Euclide. Les Éléments*, París, 1966. Itard añade los *Données* en las págs. 517-603, *i. e.* la traducción de los *Datos* de Euclides, a partir del texto de Heiberg-Menge y de un estudio crítico de M. Michaux *(Le commentaire de Marinus aux Data d'Euclide*, Lovaina, 1947). La introducción de Itard es interesante por glosar la labor crítica de Peyrard. También cabe mencionar, en atención sobre todo a su introducción y a un breve anexo sobre las geometrías no euclidianas, la edición bilingüe (texto griego de Heiberg-Stamatis y versión francesa libre) de G. J. Kayas, *Euclide. Les éléments*, París, 1978 [60bis].

Las primeras versiones alemanas conocidas son la de los libros VII-IX a cargo de J. Scheubel (Tubinga, 1558) y la de los libros I-VI a cargo de W. Holtzmann (Basilea, 1562) —esta segunda, en particular, parece obedecer a propósitos prácticos hasta el punto de ser una versión bastante libre y prescindir de las pruebas—. (Hay, sin embargo, noticias de una *Geometría Teutsch* anónima, aparecida en Nuremberg, 1484). La primera traducción literal se hará esperar hasta 1773: es la de los seis primeros libros realizada por J. F. Lorenz. Dos ediciones comentadas de especial importancia son las de E. S. Unger, *Die Geometrie des Euklid* (Basilea, 1833), y M. Simon, *Euklid und die sechs planimetrischen Bücher* (Berlín, 1901; para entonces la geometría euclidiana ya había alcanzado su mayoría de edad formal con D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig, 1899). La traducción más empleada hoy sigue siendo la de C. Thaer, *Euklid. Die Elemente* (Leipzig, 1933-1937), Darmstadt, 1980[8]; está realizada y anotada sobre la edición de Heiberg.

[60bis] Durante la corrección de pruebas, ha llegado a mis manos la versión: EUCLIDE, *Les Éléments*, vol. I *(Livres I à IV)*, París, 1990, con introducción de M. CAVEING y traducción y comentarios de B. VITRAC. Aquí sólo puedo dejar constancia de su aparición.

La primera y, en opinión de Heath, más importante traducción inglesa es la de H. Billingsley, *The Elements of Geometrie of the most ancient Philosopher Euclide of Megara*, Londres, 1570. (La hipótesis de un Euclides en inglés en la primera mitad del siglo x, sugerida por unos antiguos versos [61], está completamente descartada). La versión de Billingsley acusa el influjo de las «tradiciones» Campano-Zamberti. Pero, además, sus notas se benefician de Proclo y de otros comentadores griegos y, por añadidura, la edición cuenta con un interesante prefacio de J. Dee que merece atención por sí mismo [62]. Otra contribución de importancia fue la realizada por R. Simson al hacer dos versiones, una latina y otra inglesa, publicadas en el mismo año (Glasgow, 1756), sobre la base de la edición latina de Commandino; las dos versiones, no muy literales, vienen acompañadas de varias notas críticas y matemáticas. Simson aprovechó las frecuentes reediciones de su versión inglesa para revisar el texto con la ayuda de

[61] *Vid.* T. L. HEATH, ed. cit., 1926[2], pág. 95; cf. F. A. YELDHAM, «The alleged early English version of Euclid», *Isis* 9 (1927), 234-238.

[62] *Vid.* J. DEE, *The Mathematical Preface to the Elements of Euclid of Megara (1570)*, edic. de A. G. DEBUS, Nueva York, 1975. Commandino destaca la idea de demostración y el rigor deductivo del *ars disserendi*, mientras que J. Dee se interesa por la utilidad práctica del cálculo y la calidad heurística del *ars inveniendi*. Sobre el significado histórico de esta divergencia, *vid.* E. I. RAMBALDI, «John Dee and Federico Commandino: an English and an Italian interpretation of Euclid during the Renaissance», *Rivista di Storia della Filosofia* XLIV-2 (1989), 211-247.

un *learned gentleman*. Gracias a su difusión tanto dentro del Reino Unido (alcanzaría la edic. 26.ª antes de cumplir su centenario), como fuera de él (aquí en España, sin ir más lejos), se convirtió en la versión más conocida del siglo XVIII. Podemos terminar recordando una vez más la edición monumental de T. S. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (Cambridge, 1909, 1926[2] edic. revisada), Nueva York, 1956. Su traducción, hecha sobre el texto establecido por Heiberg, todavía representa hoy la traducción estándar de los *Elementos*, la versión común de referencia entre los historiadores de las matemáticas y de la ciencia en general. También ha sido Heath la autoridad principal a la hora de fijar las acepciones técnicas de los términos matemáticos griegos —según se reconoce en el prefacio de 1925 de H. S. Jones y en el *postscript* editorial de 1940 del Liddel & Scott: *Greek-English Lexicon*—. Por si esto fuera poco, con su detallada introducción y sus copiosas notas y referencias a lo largo del texto, esta edición constituye aún la fuente más completa de información histórico-matemática sobre el tratado de que disponemos. Naturalmente, el notable renacimiento del interés por la matemática griega en esta segunda mitad del siglo, las discusiones en torno a ciertas cuestiones y relaciones oscuras de los *Elementos* con la matemática anterior, el mejor conocimiento de algunos momentos de la transmisión del texto, han hecho sentir a esta edición el peso de la edad. Heath, por poner algún ejemplo, no podía caer entonces en la cuenta de la importancia y la complejidad de ciertos aspectos de las tradiciones pre-euclídeas, como los desvelados por Szabó, Knorr o Fowler; no podía contar con una visión de la estructura deductiva de los *Elementos* como la que hoy proporcionan las reconstrucciones parciales de algunos libros o la reconstrucción general de Mueller; tampoco podía llegar al conocimiento del Euclides latino medieval que nos han suministrado los estudios de Clagett y Murdoch, el trabajo editorial de Busard. Pero ninguno de estos achaques afecta a la traducción de Heath; ni ha vuelto ocioso, por cierto, el fruto de su erudición, su acopio de la mejor información disponible en el primer tercio del siglo.

VI. Los «Elementos» en España

A diferencia de lo que ocurre en otras lenguas civilizadas, en español no ha aparecido hasta el momento ninguna traducción completa de los *Elementos*. Y por contraste con lo que sucede en otras partes, tampoco hay al parecer un catálogo cabal o un análisis comprensivo de las versiones y paráfrasis de Euclides en este país nuestro de las maravillas, aunque la suerte de los *Elementos* sea un aspecto significativo de la suerte que corren los estudios clásicos y matemáticos en el mundo hispánico durante los siglos XVI y XVII especialmente [63].

No se conoce ninguna versión en español de los *Elementos* anterior a los años 1570; la primera traducción de que hay noticia data de 1574 y está impresa en 1576. Esta versión y las posteriores son obra de matemáticos; ni el cultivo del griego atravesaba por un momento floreciente, ni nuestros filólogos o nuestros helenistas suelen estar para ocuparse de estas cosas (de autores como Euclides, Arquí-

[63] Puede que el reciente M. E. PIÑERO y M.ª I. VICENTE, «Primeras versiones castellanas (1540-1640) de las obras de Euclides: su finalidad y sus autores», *Asclepio* XLI-1 (1989), 203-231, sea un anuncio de mejores tiempos. Da noticias bio-bibliográficas de las versiones aquí numeradas 1-3, 5-7 (vid. *infra*) sin entrar en su contenido, pero con referencias a su marco histórico.

medes, Tolemeo...) [64]. Por otro lado, a medida que avanza el siglo XVIII, la traducción de los *Elementos* deviene una empresa carente de sentido en vista de la modernización —asentada por fin— de las matemáticas en España [65]. Pues bien, dentro de este marco de los siglos XVI-XVIII, intentaré una recopilación provisional de las versiones existentes de los *Elementos* y haré unas breves observaciones para destacar algún rasgo sintomático o característico. Por

[64] *Vid.* C. HERNANDO, *Helenismo e ilustración. (El griego en el s. XVIII español)*, Madrid, 1975; L. GIL, *Panorama social del humanismo español (1500-1800)*, Madrid, 1981. Son estudios sumamente ilustrativos por la copiosa información que proporcionan acerca de la postración del griego en la cultura humanista española de estos siglos. Pero también son sintomáticos por su propia selección del material digno de consideración: versiones y ediciones de las «letras» griegas, sin hacer referencia a la otra dimensión, los textos «científicos», del legado clásico. Esta omisión sesga a veces los datos aducidos, e. g.: según Gil, durante todo el siglo XVII, sólo se darían 10 traducciones directas del griego y 15 indirectas, a través del latín y del italiano *(op. cit.*, pág. 217, sobre la base de un cómputo de BEARDSLEY). De ser así, no entran en estas cuentas las versiones impresas de Euclides (sólo de los *Elementos* hay 5) y de otros clásicos «científicos» (como Hipócrates, Tolemeo, Galeno). Por lo demás, tampoco se recuerdan las versiones aparecidas en el siglo anterior. Cf. J. M.ª LÓPEZ PIÑERO y T. F. GLICK, *Bibliometría e inventario (Hispaniae Scientia* I). Valencia, 1979, donde se recogen las impresiones de textos científicos españoles hasta 1600.

[65] Cabe hacerse una idea de la cultura matemática española de los siglos XVI-XVIII y de las instituciones y factores que intervienen en la situación, a través de J. M.ª LÓPEZ PIÑERO, *Ciencia y técnica en la sociedad española de los siglos XVI y XVII*, Barcelona, 1979. Entre los estudios con un enfoque más monográfico, *vid.* J. REY PASTOR, *Los matemáticos españoles del siglo XVI*, Madrid, 1926; P. PEÑALVER, *Bosquejo de la matemática española en los siglos de la decadencia*, Sevilla, 1930; J. M.ª SÁNCHEZ PÉREZ, «La matemática», en el colectivo *Estudios sobre la ciencia española del siglo XVII*, Madrid, 1935, págs. 597-633; S. GARMA, «Cultura matemática en la España de los ss. XVIII y XIX», en el colectivo *Ciencia y sociedad en España*, Madrid, 1988, págs. 93-127.

lo demás, no entraré en la consideración de otra literatura euclidiana frecuente por entonces, como la compuesta por extractos, comentarios, adaptaciones y usos varios [66].

Las versiones en español que he podido conocer [67] han sido las siguientes:

[66] Me refiero a obras del tipo de P. J. MONZÓ, *Elementa Arithmeticae et Geometriae ad disciplinas omnes, Aristotelis praesertim Dialecticam ac Philosophiam... ex Euclide decerpta*, Valencia, 1559; J. SEGURA, *Mathematicae quaedam selectae propositiones ex Euclidis, Boëtij, & antiquorum aliorum libris decerptae...*, Alcalá, 1566. O comentarios como los de J. MUÑOZ, *Interpretatio in sex libros Euclidis* (último tercio del siglo XVI); F. SÁNCHEZ «el escéptico», *Objectiones et erotemata super geometricas Euclidis demonstrationes* (1577(?)); R. DOSMA, *Annotationes in Euclidem, Archimedem et alios* (principios del siglo XVII). Pero también cabe incluir extractos y usos de Euclides en castellano como los aprovechados por JULIO CÉSAR FIRRUFINO, *Platica manual y breve compendio de artillería*, Madrid, 1626; o, en fin, reelaboraciones dentro de la tradición de la geometría especulativa-práctica, como las de J. ZARAGOZA, *Euclides Nuevo-Antiguo. Geometría especulativa y práctica de los planos y sólidos*, Valencia, 1671; A. PUIG, *Arîtmética especulativa y práctica y arte de Álgebra con la explicación de los libros V y VII-X de Euclides*, Valencia, 1672. La literatura euclidiana de este tipo provinente de los medios universitarios tradicionales solía publicarse en latín, a pesar de que nuestros universitarios de entonces tampoco destacaban por sus latines.

[67] Una fuente común de información bibliográfica es F. PICATOSTE, *Apuntes para una biblioteca científica española del siglo XVI*, Madrid, 1891; también es accesible el «inventario» de M. MENÉNDEZ PELAYO, *La ciencia española* (en la edic. de M. ARTIGAS, Madrid, 1933, tomo II, págs. 342-369). Así mismo, cabe acudir a los trabajos ya citados de REY PASTOR (1926) y SÁNCHEZ PÉREZ (1935). REY PASTOR, precisamente, menciona como traductores de los libros I-VI en el siglo XVI a Julio César Firrufino y a Jerónimo Muñoz —junto con Rodrigo de Porras, Juan Cedillo y Nicolás Vibario—, op. cit., pág. 159. De la existencia de una «traducción» de J. C. Firrufino, PICATOSTE sólo tiene constancia indirecta (1891, op. cit., pág. 108, ref. 289); desde luego, no pueden llegar a tanto las siete definiciones del libro I y los resultados sobre perpendicula-

1 *Los seis libros primeros de la Geometria de Evclides, Traduzidos en lengua Española por Rodrigo çamorano Astrologo y Mathematico, y Cathedratico de Cosmographia por su Magestad en la casa de Contratacio de Seuilla*, Sevilla, 1576.

Es un volumen en 4.°, con 121 folios y fe de erratas. Tiene licencia real de Felipe II, fechado en marzo de 1574, y está dedicado a Luciano de Negron, canónigo de Sevilla. En su prólogo «Al curioso lector», Zamorano recoge la tradición que remonta el origen de la geometría a las necesidades prácticas de medición provocadas por las crecidas del Nilo, e insiste no sólo en sus aplicaciones y servicios a muy diversas artes y disciplinas, sino en su calidad de ciencia básica y demostrada. «Y finalmente a nadie podemos juzgar por docto, a nadie por perito en su ciencia o arte alguna: si carece del conocimiento de la Geometría, basis y fundamento de todas ellas» (fol. 7r). Así mismo dice que se limita a los seis primeros libros por ser los más necesarios y que renuncia a añadirles comentarios o escolios —«que pudiera»— por bastarse el propio texto. Las definiciones, el «primer género de principios» que abre el libro I, son 35 y de este tenor: «1. Punto es, cuya parte es ninguna», «4. Línea recta es la que igualmente está entre sus puntos», «35. Líneas rectas paralelas son las que estando en un mismo llano, y extendidas de ambas partes en infinito, en ninguna parte concurren». Su alto número obedece a la introducción de una Def. 19 (del segmento de círculo) y a la distribución de algunas definiciones euclídeas en los casos comprendidos (clases de ángulos, de triángulos, de rectángulos). El segundo género de principios, «las peticiones», consiste en los cinco postulados normales. El tercer género, «las comunes sentencias», suma diez nociones: incluye no sólo las tres primeras,

res, paralelas e inscripciones, que este autor emplea en su ya citado *Platica manual y breve compendio de artilleria*, 1626 (*vid.* fols. 1v-3r y 3r-6r, respectivamente); hay noticia, sin embargo, de una versión manuscrita de su padre, Julián Firrufino. Por último, me temo que la referencia de Rey Pastor a Jerónimo Muñoz da en tomar sus comentarios a Euclides (libros I-VI) por una traducción.

sino otras cuatro habituales en la tradición arábigo-latina [68]; más «8. Las ⟨cosas⟩ que entre sí convienen son iguales entre sí», «9. El todo es mayor que su parte», «10. Dos líneas rectas no cierran superficie». Tales principios están ilustrados además con figuras geométricas. El número de las proposiciones de los libros I-VI concuerda con el hoy establecido —las proposiciones presentan una doble numeración: la correspondiente a su orden entre los problemas y teoremas y la correspondiente a su orden dentro de la secuencia general del libro—. Las definiciones de V y VI presentan ciertas alteraciones típicas: por ejemplo, en V se introducen los conceptos de proporcionalidad «ordenada», «desordenada» y «apartada» (Deff. 18-20); en VI se añade la definición 5 de «razón compuesta». La estructura de las proposiciones sigue una pauta reconocible: enunciado, referencia a un caso dado («Sea...») y construcción subsiguiente (prueba iniciada con un «Porque...»), remate de la conclusión («Lo cual convino —convenía— hacerse» o «Lo cual convino —había de— demostrarse», según se trate de problemas o teoremas). En cada caso figura la ilustración gráfica pertinente y se mencionan los principios o las proposiciones previas que justifican los principales pasos de la prueba.

Esta versión de Zamorano es, en conjunto, excelente. Constituye la única traducción propiamente dicha que he encontrado en este período de los siglos XVI-XVIII. Puede que la edic. latina de Zamberti (1505) sea su principal texto fuente [69]. Se mueve den-

[68] Son las sentencias comunes 4: «Y si a desiguales se juntan cosas iguales los todos serán desiguales». 5: «Y si de desiguales se quitan cosas iguales las restas serán desiguales». 6: «Las cosas que son dobladas a una misma son iguales entre sí». 7: «Las cosas que son de una misma mitad son iguales entre sí».

[69] Vid. B. Zamberti, *Euclidis megarensis...*, Venecia, 1505 (Biblioteca Nacional, 2, 24543). En las nociones clave como las definiciones, postulados y nociones comunes del libro I, y las definiciones del libro V, sólo cabe apreciar contadas diferencias terminológicas entre el español de Zamorano y el latín de Zamberti (a saber: «punto»/«signum», «lla-

tro de la tradición que considera a Euclides filósofo megarense y los *Elementos* compuestos por 15 libros. Por otra parte, varios de los rasgos antes señalados serán compartidos por las versiones españolas subsiguientes. Un detalle final, revelador de los usos académicos de la época, es que Zamorano tenga que defender su versión castellana frente a la opinión entonces vigente: «que el andar las scientias en lengua vulgar es hazerlas Mechanicas»; pocos años después, una orden de Felipe II contribuirá a que las vindicaciones de este tipo resulten innecesarias [70].

no»/«planus», «quadrangulo»/«altera pars longius», «cantidad»/«magnitudo», «semejanza»/«identitas»), amén de un cambio de orden de las definiciones 12 y 13 de V (razón permutada, razón conversa). Zamorano no parece seguir, en cambio, la versión latina de Campano editada por Ratdolt en Venecia, 1482, aunque podía haber entonces ejemplares disponibles (al menos, hoy se conservan en Madrid, Barcelona, Sevilla, Valladolid). Tampoco hay motivos para suponer que utilizara una edición griega (e.g. la de Grynaeus, 1533). Por otro lado, puede que la versión latina de Commandino (Pesaro, 1572) resultara demasiado reciente —en todo caso, Zamorano no se muestra en deuda con ella—; esta edición o la italiana revisada en 1575 será la seguida más tarde por otro matemático de la Casa de Contratación, Miguel Jerónimo de Sta. Cruz, en el estudio de las proporciones de la segunda parte (libro II) de su *Dorado Contador, Arithmetica especulativa y practica*, Madrid, 1594.

70 En la licencia y privilegio del rey Felipe que autoriza —con fecha de 15 de septiembre de 1584— la publicación de *La Perspectiva y la Especvlaria de Evclides traduzidas en vulgar Castellano por Pedro Ambrosio Onderiz* (Madrid, 1585), se menciona la existencia de esta orden real: «que en nuestra corte se leyesen las matemáticas en lengua castellana». El propio Ondériz, al dirigirse al lector, se hace eco de la orden y recuerda que se había llamado a Juan Bautista Labaña para presidir esta tarea en la recien creada Academia de Matemáticas (1583). La Casa de Contratacion —en la que profesaba Zamorano— y esta misma Academia —en la que profesará Juan Cedillo Díaz y se formará Luis Carduchi— son instituciones con aires humanistas y unos intereses técnicos alejados de la escolastica latina de la universidad tradicional.

2. *Teorica y practica de fortificacion, conforme las medidas y defensas destos tiempos, repartida en tres partes, por el Capitan Cristoval de Rojas, Ingeniero del Rey nuestro Señor*, Madrid, 1598.

Es un volumen de 106 folios numerados, que incluye una dedicatoria —fechada en 1596— «al Príncipe nuestro Señor Don Felipe III», un prólogo y un grabado; al final agrega una tabla de contenidos. En el prólogo, Cristóbal de Rojas reconoce el estímulo que habían supuesto las lecciones sobre la geometría de Euclides dadas en la Academia Real por Julián Firrufino «que con la profesión de leyes acompaña la de las ciencias Mathematicas»; pero nuestro ingeniero atribuye un papel decisivo en la composición de su libro a don Francisco Arias de Bobadilla, Conde de Puñoenrostro, quien le había encomendado la enseñanza de la fortificación al procurar que otros también «leyeran» en la Academia Real otras materias relacionadas con la geometría. Este libro de Cristóbal de Rojas viene a ser una buena muestra de los usos y servicios que por entonces parecían asegurar la supervivencia de Euclides —de un cierto Euclides—. En el cap. II de la primera parte de la obra, el autor afirma que «la primera de las tres cosas que han de concurrir en el Ingeniero, es la Geometría» (las otras dos serán la aritmética y el reconocimiento de los sitios); allí mismo alude a las 35 definiciones, 5 peticiones y 10 comunes sentencias del libro I de los *Elementos*, y se refiere a algunas proposiciones principales de los libros I-VI, XI y XII. En el cap. 5, aparecen 15 definiciones con figuras ilustrativas al margen (fols. 4v-5v); algunas son versiones escolares de definiciones del libro I (e. g.: «Punto, cuya parte es ninguna», «Línea es la que tiene longitud y no latitud ni anchura»); otras son peculiares (e. g.: «Ángulos de Advertice son los de las dos CC y lo mismo son los de las dos DD», por referencia a una figura adjunta en la que CC y DD designan ángulos opuestos por el vértice; «Ángulos Deinceps son los destas dos letras EE», por referencia a una figura adjunta en la que EE designan ángulos adyacentes). En el mismo capítulo se recogen a continuación (fols. 5v-14r) 12 proposiciones del libro I (1, 3, 9-10, 12-13, 21, 23, 31-32,

46-47); 2 del II (3, 12); 2 del III (31, 36); 3 del IV (5, 10-11)
más un «corolario de la penúltima»; 1 del V (16); 6 del VI (4,
12-13, 17, 25, 30); 1 del XI (14). Su presentación sigue esta pau-
ta: el autor parafrasea el enunciado de la proposición en cues-
tión, encarece su importancia o su utilidad, da una prueba sucin-
ta —por lo regular más sugerida que desarrollada—; en ocasio-
nes (e. g., en el corolario o porisma de IV, 15; en VI, 4; en
XI, 14), falta incluso esa especie de prueba. En todo caso, está
claro que Cristóbal de Rojas pretende una iniciación geométrica
elemental, no una versión (de fragmentos) de los *Elementos* de
Euclides. Por lo demás, el resto del libro ya no guarda ni siquiera
esa lejana relación con los *Elementos* euclídeos.

3. *Testos de los 15 libros de los Elementos de Euclides romanceados por don R.° de porras.*

Es un manuscrito en 4.° de 148 folios (algunos de ellos en
blanco); los libros I-XIII cubren los fols. 1-65r (XIV-XV, fols.
65v-68v); siguen unas proposiciones geométricas demostradas por
el propio Rodrigo de Porras (fols. 73r ss.), y aritméticas (fols.
121r ss.), hasta concluir con cuestiones de binomios resueltas al-
gebraicamente (fols. 137r ss.). Se encuentra en la Biblioteca Na-
cional, Ms. 9285. Data probablemente de finales del siglo XVI
o principios del siglo XVII.

El libro I, donde Porras alude a la condición de Euclides co-
mo «philosopho megarense», empieza con las definiciones; son
35, como en Zamorano, pero de distinto tenor: «1. Punto es una
cosa indivisible porque carece de partes», «4. Línea recta es la
brevísima extensión de punto a punto», «35. Líneas equidistantes
o paralelas son las que están en una misma superficie y no concu-
rren aunque sean alargadas en infinito por una y otra parte» [71].

[71] Esa noción de línea recta, procedente de Arquímedes, y su proyec-
ción sobre la noción de superficie plana habían sido difundidas por el
comentario de Al-Nayrīzī. La asociación de «equidistantes» a «paralelas»
también era común en la tradición arábigo-latina y subsistió durante mu-
cho tiempo (como ya veremos, hasta bien entrado el siglo XVIII, e. g.,
en Simson, 1756, 1774), a pesar de la crítica a que Saccheri sometió esta

Las «peticiones» o postulados se asemejan a los de Zamorano,
pero al final aparece tachado «dos líneas rectas no cierran super-
ficie» que, luego, constituye la «común sentencia» décima y últi-
ma —estas comunes sentencias son también parejas a las de
Zamorano—. Las proposiciones tienen la doble numeración que
ya habíamos visto en la traducción anterior. Los libros V y VI
tienen así mismo una disposición similar, aunque la def. VI, 8
de Porras menciona la proporcionalidad continua y se aproxima
más a la tradición de Adelardo y Campano. En VII —donde
Euclides sólo ofrece definiciones—, Porras introduce 4 peticiones
y 2 comunes sentencias; las tres primeras peticiones son postula-
dos procedentes de Jordano y la cuarta es una adición de Cam-
pano; las comunes sentencias son: «1. Toda parte es menor que
un todo», «2. Todos aquellos números que fueren igualmente
multíplices a un mismo número o a números iguales, serán igua-
les entre sí». También el libro X cuenta con una petición original
que no he conseguido descifrar por completo: «Una cantidad puede
ser multiplicada tantas veces que ⟨¿... ...?⟩ se da otra cualquiera
cantidad del mismo género». Los libros VII-IX tienen todos
ellos proposiciones añadidas; en cambio, XII se ha quedado sin
tres.

No se trata de una traducción, sino más bien de una versión
simplificada e incompleta: las proposiciones sólo tienen el enun-
ciado y una referencia a la figura correlativa situada al margen,
sin ninguna otra indicación o desarrollo de la prueba. E incluso
a partir del final de IX, las ilustraciones desaparecen aunque se
les reserva un espacio al margen en blanco. Quizás se trate de
un material de trabajo puesto en limpio, pero no ultimado. El
texto fuente es más difícil de adivinar aún que el de Zamorano;
según todos los visos, Porras parte de una versión ecléctica que
acusa ante todo el peso de la tradición arábigo-latina y la media-
ción de Campano.

definición «complessa», que colaba de rondón, en la definición de «lí-
neas paralelas», una hipótesis de equidistancia necesitada de prueba.

4. Manuscrito anónimo, sin título ni fecha (conjeturo que ronda el final del siglo XVI o principios del siglo XVII). Contiene los libros I-VI, B. N., Ms. 9128; tamaño folio, 121 fols.

El libro «Primo» tiene 24 definiciones con una disposición semejante a la euclídea, pero no sin peculiaridades de contenido y de explicación gráfica, e. g., «3.ª Línea recta es la más breve distancia entre dos puntos como la línea A...», «24.ª Líneas paralelas son las que igualmente distan por todas sus partes, como las líneas ...». No hay postulados. Las llamadas «concepciones» son 9: las 7 primeras son las ya familiares; la octava reza «Si una cantidad se pone sobre otra cantidad y no excede la una de la otra, serán iguales entre sí», como si fuera una versión de *Adelardo I;* la novena explica «el todo es mayor que la parte, como el todo ...». Entre los libros I y II (fol. 29r) se intercalan unas curiosas «proposiciones de los números» que recogen nociones de raigambre medieval sobre múltiplos («multíplices»). Por contra, el libro V se ve libre de las interpolaciones habituales y el VI sólo introduce la Def. 5 de «composición de proporción». La estructura de la proposición distingue tres pasos principales: enunciado, «Sea ...» o consideración del caso dado, «Porque ...» o prueba propiamente dicha. Cabe pensar que se trata de una versión algo simplificada, hecha a partir de una fuente relativamente sesgada por la tradición arábigo-latina, aunque se vea libre de varias de sus contaminaciones características (especialmente en el libro V).

5. *Los Primeros seys libros de Euclides, agora nuebamente traduzidos de lengua latina en castellana, explicados, demostrados y en muchas partes ilustrados. Con muchos y agradables corolarios y añadimientos. Por Nicolas Vibario, Ingeniero de su Magestad en los estados de Flandes,* Amberes, 1616. Manuscrito en tamaño folio, 266 fols. B. N., Ms. 9214.

Tras la dedicatoria a D. Íñigo de Borja, maestre de campo de un tercio de infantería en Flandes, sigue un prólogo: «Que cosa sea Geometria y las Artes mathematicas por que assi llamadas y quienes fueron sus primeros mentores». Nada tiene de particular: la etimología que declara su condición de doctrina o disciplina [*mathéma*]; el canto a su excelencia, pues las matemáticas no conceden ninguna cosa falsa y no consienten sino principios claros y conclusiones demostradas; su origen egipcio y su aumento griego gracias a las agudísimas pruebas de Euclides megarense, entre otros. «El primer elemento de Euclides» comienza en el fol. 5r. Abunda en definiciones (39) y en explicaciones: e. g., a propósito de línea recta se insiste en «el más breve camino que hay de un punto a otro, como por ejemplo...»; a continuación, se introduce la noción de línea como «una medida», superficie como «dos medidas», cuerpos y cubos como «tres medidas». Siguen 3 «preguntas», *i. e.* postulados, que reproducen los tres primeros de Euclides. Luego vienen las «comunes noticias y sentencias del entendimiento», que suman 12 al incluir el postulado cuarto (sentencia décima), el quinto (undécima) y, en fin, una versión harto peculiar de la común sentencia 12 consabida: «Dos líneas derechas no tienen espacio». La inserción de algunos postulados entre las comunes sentencias ya se encuentra en Grynaeus, en Clavio, en Candalla. Todos estos principios se ilustran con figuras; llama la atención el gasto de plumilla en la representación de sólidos para dar una impresión vívida de volumen. Se intercalan a continuación (fols. 16r-17r) unas aclaraciones acerca de los tipos de principios y de proposiciones que componen la geometría. Las definiciones del libro V también cuentan con la glosa correspondiente; la definición de proporcionalidad en términos de equimúltiplos (Def. 6) tiene una ilustración numérica, al igual que ciertas operaciones entre proporciones. La estructura de las proposiciones sigue unas pautas declaradas previamente (fol. 17r); explicación *(i. e.* «exposición de lo que se da y lo que se requiere»), operación *(i. e.* «composición con ayuda del compás y la regla») y demostración, en el caso de los problemas; pero explicación y demostración únicamente en el de los teoremas. La versión de Vibario está simplificada y acusa un claro sesgo didáctico. No faltan huellas de la formación un tanto escolástica del autor. Es difícil determinar su fuente latina. En todo caso, evidencia una confección esmerada; es una especie de

manuscrito puesto en limpio con aires de cuaderno de maestro de escuela.

6. *Los seis libros primeros de la geometría de Euclides traducidos del latin en castellano por el doctor Juan Cedillo Diaz, Cosmographo Mayor de su Magestad y Catedratico de la Real Academia de Mathematicas que se lee en su Palacio*, 1620. Forma parte de un manuscrito en tamaño folio de 219 fols. (la referencia anterior se lee en el fol. 64v), B. N., Ms. 9091.

El ms. es en conjunto un verdadero revoltijo (quizás el favor de coserle las hojas se lo hiciera a Cedillo uno de sus peores enemigos). Contiene la traducción de dos libros del *Arte de navegar* de P. Núñez de Saa (fols. 2r-20v); un ensayo, *Idea astronomica de la fabrica del mundo*, distribuido así: dos libros (fols. 108r-177v), su revisión (fols. 182r ss.), el tercer libro (fols. 84r-107v); otro ensayo, *De la Idea y Cosmologia* (fols. 180r-181v); y, en fin, fragmentos de los libros I-VI de los *Elementos* diseminados casi al azar entre el fol. 1 y el fol. 83 —el único fragmento seguido es el de las definiciones y las proposiciones 1-15 del libro VI (fols. 60-63)—. Las definiciones de I son las tradicionales 35: «1. Punto es cuya parte es ninguna. O punto es una extensión sin cantidad», «4. Línea recta es la que igualmente está entre sus puntos. O así: línea recta es la más breve extensión o camino de un punto a otro punto», «35. Líneas rectas paralelas son aquellas que estando en un mismo plano y siendo producidas o extendidas en infinito por una y otra ⟨parte⟩ no se juntan jamás ni pueden». Las peticiones se reducen a los tres postulados primeros. Las comunes sentencias (repartidas entre los fols 1v y 77) son parejas a las 12 que ya hemos visto en Vibario. Las definiciones del libro V están libres en cambio de las contaminaciones habituales (*vid.* fol. 80v). Por lo demás, las proposiciones vienen glosadas, pero sus pruebas se han simplificado. Seguramente Cedillo se ha servido de diversas fuentes —una de ellas podría ser la empleada por Zamorano si no su traducción misma—, y no falta la obligada referencia de Campano. Según todos los visos, se trata de un borrador todavía incompleto de lo que podría ser una versión ecléctica e instructiva de los *Elementos* (I-VI).

7. *Elementos geometricos de Evclides philosopho megarense. Sus seys primeros libros. Traducido el texto y comentado por Lvis Cardvchi Mathematico de su Magestad*, Alcalá, 1637.

Es la segunda versión castellana de los *Elementos* que ve la imprenta. Se trata de un volumen en 4.° al que adornan unos poemillas de amigos del autor, una Advertencia de éste (que incluye fe de erratas), un prólogo en el que ensalza la geometría por sus múltiples aplicaciones prácticas sin olvidar de paso un elogio de la pintura —o, más bien, de los *Diálogos de la pintura*, de Vicencio Carduchi—, y una dedicatoria al Excmo. Sr. D. Gaspar de Guzmán, conde de Olivares. Es ilustrativa del espíritu de los tiempos la aprobación del P. Ricardo (Richard), a la sazón catedrático de matemáticas en el Colegio Imperial: «He leydo este comentario sobre los seis primeros libros de Euclides ... y me parecen dignos de ser impresos por la breuedad y claridad del comentario necessaria a todos los que quisieran sauer la Geometria». La versión de Carduchi (fols. 1-144) se inicia con unos breves preliminares sobre la geometría («ciencia contemplativa y descripción de formas y figuras de la cantidad continua, que muestra las propiedades de las figuras») y sobre sus especies (a saber: línea, superficie y cuerpo). Las definiciones de I son 29 y tienen una glosa explicativa o ilustrativa: «1. Punto es, cuya parte es ninguna», «Línea recta es la más breve extensión de un punto a otro —o fluxo de un punto a otro—», «28. Líneas paralelas son las que igualmente distan por todos sus puntos y extendidas en infinito jamás concurren», «29. Líneas paralelas hacen a una misma parte los ángulos iguales a dos rectos; y las que no lo son, hacen los ángulos a una parte menores que dos rectos». Tras una nota sobre las nociones de «petición» y de «sentencia común», siguen las peticiones. Son siete, Carduchi intercala como petición 2: «Concédase que de un punto a otro no puede haber más que una línea recta» y añade como petición 7: «Dos líneas rectas no cierran superficie». Las comunes sentencias quedan re-

ducidas entonces a nueve y no son otras que las ya familiares. La glosa de las peticiones y sentencias no es explicativa, sino puramente ilustrativa. En V y VI reproduce las definiciones usuales interpoladas, incluida la de proporcionalidad continua. La estructura de la proposición sigue la pauta presente de Zamorano, aunque las pruebas están por lo general resumidas. Es posible que Carduchi haya tenido en cuenta la traducción de Zamorano. Pero el peso de la tradición arábigo-latina y de Campano parece más acusado y su versión es muy inferior: no sólo por asemejarse a una paráfrasis de Euclides, de raíz ecléctica y con propósitos didácticos, sino porque su castellano incorpora —además de los grecismos habituales en aquel tiempo (triángulo «orthogonio», «ambligonio», «oxigonio»)— algún que otro latinismo (e. g., «adinvicem») y algún que otro arabismo («helmuayn», «helmuaerife»), inexistentes en las demás traducciones y versiones.

8. Lorenzo de San Nicolás, *Arte y uso de la arquitectura*, vol. I, Madrid, 1633; vol. II, Madrid, 1665.

Esta obra, modelo dentro de su género —fue el manual de arquitectura de mayor influjo en España y en Hispanoamérica durante el barroco—, contiene en su vol. II una versión del libro I a cargo de Antonio de Náxera: definiciones, postulados y axiomas en el cap. XVI, págs. 28-40, y proposiciones en un apéndice, págs. 220-287; en el vol. I, la versión del libro V del mismo traductor y una versión del libro VII a cargo de Juan de la Rocha, ambas en el cap. LXV, págs. 213-355. Precisamente en este último contexto, tras aludir a la versión de Antonio de Náxera de los libros I-IV y VI, el P. Lorenzo de San Nicolás declara refiriéndose a los libros V y VII: «De quien estos dos se han traducido y los cinco dichos es del Padre Cristóbal Clavio Bambergensi, de la Compañía de Jesús» (pág. 282). Suponemos que habría una versión de Antonio de Náxera de la que hoy sólo conocemos los libros aquí recogidos, a la que se añade la versión del libro VII por cuenta de Juan de la Rocha: las dos se mueven en el ámbito de influencia de la edición comentada de Clavio. El ejemplar que he manejado corresponde a la 4.ª imp., 1796.

En el caso de I, nos encontramos con las 35 definiciones de rigor («1. Punto es aquel que su parte es nada o que no tiene ninguna grandeza», «4. Línea recta es aquella que igualmente se interpone entre sus puntos» —también se alude a su condición de línea más corta—, «35. Líneas paralelas son aquellas que estando en un mismo plano y produciéndose en infinito, para una y otra parte, jamás se encontrarán una con otra»). Las peticiones o «postulata» son los tres postulados primeros a los que se agrega: «4. A cualquier grandeza dada se puede tomar otra grandeza, o mayor o menor»; Náxera reconoce además la existencia de otras que se mencionarán más adelante, cuando las requieran las pruebas de las proposiciones. Los axiomas o sentencias comunes son diez, el último es el acostumbrado: «Dos líneas rectas no comprehenden espacio». Si en I abundan los escolios, en V se presta especial atención a un catálogo de las proporciones y al hallazgo y uso de las proporciones racionales. Pero, en general, las proposiciones discurren sin hacer referencia a la justificación teórica de las pruebas (a los principios o a las proposiciones previamente sentadas), sino a su demostración práctica por medio de figuras y de construcciones diagramáticas. Dado el contexto en el que aparecen, es natural que en estas versiones prevalezca el interés por una exposición breve, clara e ilustrativa. Aun así, su valor —en particular, el de la versión del libro I—, resulta muy superior al de los extractos y las adaptaciones que solían incluir por entonces los manuales de matemática aplicada; baste recordar el precedente —ya referido— de la *Teorica y practica de fortificación*, de Cristóbal de Rojas (1598).

9. *Los seis primeros libros, onze y doze de los elementos geometricos de Euclides megarense, aumentados de muchas Proposiciones curiosas que facilitan su uso. Por don Sebastian Fernandez de Medrano, Capitán y Maestro de Metemáticas del ejército de los Paises Bajos*, Bruselas, 1688.

Se trata de una impresión en 8.° de 340 págs., y es la primera muestra hispana de la adición de XI-XII a los libros «fundamentales» I-VI, conforme al uso impuesto a mediados del siglo XVII,

sobre todo en Francia (e. g., por las ediciones de A. Tacquet, 1654, o Milliet de Chales, 1660). En I, a las 35 definiciones «de Euclides», Medrano agrega otras dos que, según él, incluyen los geómetras para más inteligencia; son las de *paralelogramo* y *cumplimiento* o *suplimiento, i.e.* el paralelogramo «por el que no pasa el diámetro de todo un paralelogramo». Las peticiones o «demandas» son las tres de rigor, pero también se menciona la cuarta de Clavio: «siendo dado un grandor o cantidad: que se puede tomar otra mayor o menor». Los axiomas, «máximas» o comunes sentencias suman, a su vez, trece: los 12 habituales en la línea de Clavio y «13. Dos líneas rectas que se encuentran indirectamente no tienen un mismo segmento». En el caso de 11, que recoge el postulado de las paralelas, Medrano alude a la necesidad de demostración que algunos intérpretes alegan y a su sustitución por este criterio: «las líneas que se terminan en dos paralelas, siendo perpendiculares a ellas, serán iguales» —formulación que tal vez se difundió a partir de la edición de G. Vitale: *Euclide restituto* (Roma, 1680)—. En el libro V, Medrano hace referencia a la generalidad y dificultad de la teoría de las proporciones, que presenta en versión simplificada y accesible «siguiendo a autores modernos». Tras las definiciones —cuya mayor peculiaridad es la introducción de una prueba de la definición euclídea de proporción en términos de equimúltiplos, prueba obediente también a ciertos gustos modernos—, explicita como postulado: «pídese que propuestas tres cantidades se conceda una cuarta < proporcional > ». Tanto el libro VI como los libros XI y XII son objeto de tratamiento sumario; se omiten no sólo ciertas pruebas que se consideran evidentes, sino algunas proposiciones. Por lo demás, al principio de XI explica la omisión de VII-X en razón de que versan sobre inconmensurables, y su estudio es más sencillo por medio de la llamada «álgebra especiosa o Analítica».

La versión de Medrano conoce una nueva edición, «amplificada», en Amberes, 1708, cuando el autor ha alcanzado el grado de Sargento General de Batalla. No he tenido acceso a ella. Años después aparece una reimpresión en 8.°, 327 págs. (Amberes, 1708), que Medrano —ahora Director de la Academia Real y Militar de los Países Bajos— justifica por haberse agotado las ediciones anteriores o haberse quemado los ejemplares que quedaban bajo el fuego graneado de un ataque a Bruselas. Un añadido que cabe reseñar es el de una proposición alternativa a I, 19, consistente en realidad en la proposición conversa de I, 27 (*vid.* Apéndice, págs. 324-327). Pero esta postrera edición mantiene, en general, los términos, los principios y las pruebas simplificadas de la edición primera (e incluso la trasnochada referencia a Euclides como filósofo megarense).

10. *Elementos geometricos de Evclides. Los seis primeros libros de los planos y los onzeno y dozeno de los solidos; con algunos selectos theoremas de Archimedes, traduzidos y explicados por el P. Jacobo Kresa de la Compañía de Jesvs,* Bruselas, 1689.

Es un volumen en 4.° con 459 págs. El P. Kresa, de origen austríaco, profesor durante algún tiempo del Colegio Imperial en Madrid, aduce para justificar esta versión el hecho de que la antigüedad o la excesiva brevedad de otras anteriores hacían los *Elementos* «arduos a los principiantes». La verdad es que no aporta grandes novedades, salvo la de elevar el número de los axiomas hasta 20 de manera que quepan entre ellos no sólo los tradicionales de Clavio, sino los explicitados por otros jesuitas editores de Euclides, en particular el P. Andrè Tacquet, quien también había sido llamado anteriormente para desempeñar la cátedra de matemáticas del Colegio Imperial. En el libro V se dejan oír los ecos de Campano, pero el más escuchado sigue siendo Tacquet, del que Kresa toma un apéndice sobre las operaciones y la composición de razones racionales e irracionales. La autoridad del «método» de Tacquet campea en el libro XII, donde es seguido al pie de la letra —según confesión del propio Kresa—, y en los teoremas extraídos de Arquímedes. En suma, representa no una versión, sino más bien una paráfrasis en la línea marcada por algunos comentadores euclidianos notables de la Compañía de Jesús.

11. *Los seys primeros libros de los elementos de Euclides. Explicados y demostrados por don Francisco Larrando de Mauleón, Capitan de Infanteria Española*, Barcelona, 1698.

Es un volumen en 32.° con 368 págs. Su dedicatoria a don Manuel A. de Velasco y Tobar puede ilustrar una de las tres vías principales de introducción del viejo Euclides en España. Me refiero a la de los profesionales de la milicia que alternan esta ocupación con la docencia más o menos regular de las matemáticas. Dice Larrando con su peculiar retórica militar: «Es la Geometría (especial blanco de mi pluma) una de las partes de la Matemática que es más conveniente a un Monarca y a un Capitán General y a un Príncipe. Toda la razón de estado es ciega sin el conocimiento de esta nobilísima ciencia. Todas las líneas del gobernar se han de tirar al centro de la utilidad común: Geómetra es el Príncipe o el Gobernador que ha de saber medir la distancia que hay del mandar al obedecer. Para todas las funciones del Arte Militar, es la que da más luz la Geometría, verdad tan innegable que la confiesan todas las Escuelas de Marte». Tras estos loores nos encontramos con una versión simplificada e ilustrada, que no tiene mucho de particular. Los postulados se reducen a tres. Los axiomas ascienden a trece: hasta el noveno, mantienen su venerable aspecto. El décimo es: «Dos líneas no pueden tener un segmento común» (similar al axioma o máxima 13 de Medrano). El undécimo consiste en el postulado de las paralelas y el duodécimo recuerda que dos líneas no pueden encerrar un espacio. En fin, el décimotercero es: «El todo es igual que todas sus partes juntas», una precisión debida a Clavio que Medrano ya había recogido como corolario de su axioma o máxima 9 (el todo es mayor que su parte). Las pruebas de las proposiciones se ofrecen abreviadas. Con esta versión de Larrando iniciamos la pendiente que nos lleva a una paráfrasis de los *Elementos* cuyo contenido geométrico o euclidiano es más bien trivial, está decididamente escolarizado; su mayor aliciente en esta perspectiva reside seguramente en el colorido de sus consideraciones preliminares y en el tono costumbrista de su contextualización y su glosa de los resultados tradicionales.

12. Manuscrito anónimo sin título ni fecha, denominado *Tratado de Geometría* y situado en el siglo xviii por el *Inventario general de manuscritos de la Biblioteca Nacional* XI (Madrid, 1987); ref. 6104, pág. 105.

Comprende los folios numerados 7-73. Hasta el fol. 60r incluye los libros I-III de los *Elementos*. A partir del fol. 60v se introduce la «Materia de cuerdas senos rectos tangentes y secantes», con definiciones y proposiciones originales, y tiene lugar un cambio de mano o de escritura. Los fols. 65v-71r tratan de geometría esférica y vuelven a una escritura similar a la inicial. En 71v está escrito en posición invertida «Ad Euclidem». El fol. 72 está en blanco. El fol. 73v trae enmarcada una especie de plegaria y más abajo se remata con un «Finis». B. N., Ms. 6104.

No aparecen las definiciones, postulados y nociones comunes de I; el ms. comienza con la proposición 1: «*Super data recta linea terminata triangulum aequilaterum constituere.* Hacer un triángulo equilátero que tenga lo que quisieren por lado». La prueba está esquematizada; hay al margen referencias a postulados y nociones comunes bajo una curiosa clave, e. g., «C 10» (¿postulado iii?), «C 1» (¿noción común i*?). El resto de las proposiciones de I-III sigue en general una pauta parecida: tras el enunciado en latín y su versión libre en castellano viene una indicación muy somera de la prueba con algunas referencias a postulados y nociones comunes; en la carilla opuesta figura la ilustración correspondiente. En los libros II y III sí se recogen y explican las definiciones (fols. 31v y 40v, respectivamente) antes de pasar a las proposiciones. El ms. evidencia una fuente latina académica, una versión sumamente libre y una confección escolar esmerada.

13. *Euclides. Geometria especulativa y practica de los planos y solidos. Dispuesta por don Antonio Joseph Deu y Abella, Capitán agregado al estado mayor de Zaragoza*, Zaragoza, 1723.

Se trata en realidad de un manual de geometría tradicional compuesto en 4.° por 175 págs. Comprende los libros I-V, XI

y XII, aunque dentro de un marco que les es ajeno: el de la distinción entre la «Geometría especulativa», fundada en las definiciones y los axiomas (págs. 5-127), y la «Geometría práctica», abierta por los postulados (págs. 128-173) y consistente en problemas —es una distinción medieval que puede remontarse a Hugo de S. Víctor (siglo XII)—.

Deu y Abella dedica su obra «a la Madre de Dios del Pilar» con un estilo que al parecer considera a la altura de tan alta instancia: «En esta escuela, Señora, donde sus *principios primeros* son las Armas, *definiciones* los echos, y *conclusiones* las Plazas, desconocía con la experiencia el pensamiento, y practicando sus avisos, principios prácticos del Militar estudio, estudié, para que con la pluma más se ennobleciesse de la espada mejorado su exercicio». (No sé si será eximente o agravante la pretensión del autor de abrir una Academia de Matemáticas en Zaragoza.) Tras la dedicatoria, Deu y Abella declara seguir «el methodo del P. Joseph Zaragoza» y no respetar por motivos didácticos el orden de las proposiciones de Euclides —aunque sí el de los libros—. Un proemio (págs. 2-4) recoge las ideas comunes sobre la importancia de las definiciones para la ciencia, la índole de la matemática (ciencia de la cantidad inteligible, esto es: mensurable o numerable) y, en fin, sobre su división (pura/no pura o física) y sus subdivisiones. La concepción de las definiciones, postulados y axiomas, expuesta al principio de la «Geometría especulativa», concuerda con la difundida por los manifiestos del «esprit géométrique»: las definiciones son nominales, los axiomas son verdades «tan claras y evidentes que sólo suponerlas es obligar al entendimiento a confesar su verdad». A continuación, presenta los axiomas (págs. 5-6) y las definiciones (págs. 6-11) con una formulación que sintetiza las enseñanzas euclídea y moderna; e. g.: «1. *Magnitud* o grandeza: cantidad continua y mensurable. Si es finita y terminada, sus términos son los extremos de la magnitud (del continuo)». «2. *Punto Mathematico*, en la magnitud es un signo o señal indivisible, sólo por imposición y consideración del entendimiento». Los postulados de la «Geometría práctica» tienen una presentación similar. Las pruebas discurren de

acuerdo con los propósitos sinópticos y pedagógicos de la obra. Por lo demás, no falta una breve recapitulación de los principios y las reglas generales de la Geometría. Son 14 y hacen referencia —por este orden— a las proporciones y los resultados de operar con ellas, a las fórmulas para hallar áreas y volúmenes, a las nociones comunes clásicas de igualdad con la adición final de «el todo es igual a sus partes juntas».

14. *Elementos geometricos de Euclides, dispuestos en methodo breve y facil para mayor comodidad de los aficionados, y uso del Real Seminario de Nobles de Madrid. Su autor el Padre Gaspar Álvarez de la Compañía de Jesús,* Madrid, 1739.

Es un volumen en 4.°, consta de 184 págs. y comprende los libros I-VI, XI y XII. Según se declara en la aprobación del P. Casani, el autor también cambia el orden y la secuencia de las proposiciones en sintonía con la intención moderna de facilitar la enseñanza; a fin de cuentas, los *Elementos* sólo son un magnífico manual, «una llave que abre la puerta a todas las facultades Mathematicas». Hablando de matemáticas, el P. Casani no deja de insistir en sus servicios de toda índole, algunos son los tradicionales (la fortificación y la estrategia militar, la navegación, la geografía...), pero otros tienen el discreto encanto de la Ilustración —en el Seminario de Nobles en particular—, e. g.: las matemáticas deparan «las curiosidades de la esfera para la conversación y familiar trato en donde se lucen las prendas; la discreción y el útil uso del tiempo; el manejo científico en la destreza; la diversión de la música. Son prendas todas de tanto adorno a la Nobleza que se echan mucho de menos cuando faltan» [72]. En las palabras «Al lector» del propio Gaspar Álvarez también abundan las referencias sintomáticas del espíritu de los tiempos. Tras aludir al escaso interés por las matemáticas en nuestro país

[72] La moda de la geometría en el mundo ilustrado había alcanzado no sólo a los filósofos, sino —desde finales del siglo XVII— a la buena sociedad. *Vid.* por ejemplo, P. HAZARD, *La crisis de la conciencia europea*, 1946², Madrid, 1952, págs. 283-284 en particular.

y a la paciencia que exige su constitución abstracta, procura justificar su nueva versión por la conveniencia de salvar la prolijidad de las demostraciones euclídeas e incluso la que padecen otras versiones disponibles como la del P. Kresa. Porque —alega— si bien el orden de Euclides es admirable, «el no poder variar en algún accidente y cansar a los principiantes probando con demostraciones largas verdades por sí patentes, lo tengo por un cierto género de superstición». A mayor abundamiento: «quien todo lo quisiere por extenso» podrá acudir a las ediciones del P. Bettino —quien, por cierto, había cambiado hasta el orden de los libros— o del P. Clavio. Gaspar Álvarez, por su parte, se apoyará en las innovaciones del P. Andrè Tacquet. La formulación de las definiciones, postulados y axiomas sigue la presentación estándar en las versiones de los jesuitas, especialmente a partir de Clavio y de Tacquet. La obra tiene el aderezo de algunos recursos didácticos (e. g., un mapa de la doctrina de los lados, ángulos y triángulos al final del libro I), pero no pasa de ser un compendio compuesto por proposiciones seleccionadas con sus demostraciones aliñadas en aras de la brevedad y la simplificación.

15. *Los seis libros primeros de los planos y los onze y doze de los solidos. Por D. Blas Martinez de Velasco.*

Es una publicación póstuma: Puerto de Santa María, 1747; 4.°, 192 págs. Siento no haber hallado un ejemplar de este libro, escrito por un discípulo de Antonio Hugo de Omerique (cuya reivindicación del «método analítico de los antiguos» en geometría mereció una elogiosa mención por parte de Newton) [73].

[73] El reconocimiento de Omerique es uno de los tópicos más repetidos a la hora de reanimar la matemática española del siglo XVII. El pasaje original de Newton puede verse en J. A. SÁNCHEZ PÉREZ, art. cit., 1935, pág. 630; hay otras referencias elogiosas de Montucla y de Chasles en las págs. 626 y 629. Por otra parte, KRESA, en su edición de los *Elementos* (1689), cita expresamente y utiliza resultados de Omerique (vid. *supra*, núm. 10, págs. 250, 264). De la versión de Martínez de Velasco sólo tengo noticia por el *Manual del librero hispanoamericano* (Barcelona, 1951[2]; tomo V, pág 199, ref. 84729); al parecer, todavía se encontraba algún ejemplar en venta en 1894.

16. *Los seis primeros libros y el undécimo y duodécimo de los Elementos de Euclides. Traducidos de nuevo sobre la versión latina de Federico Commandino conforme a la fiel, y correctísima edición de ella publicada modernamente por Roberto Simson Profesor de Matemática en la Universidad de Glasgow: e ilustrada con notas críticas y geométricas del mismo autor*, Madrid, 1774.

Es un volumen en 4.° de 360 págs. Por desgracia, no aparece el nombre del traductor. Se trata de la única versión que hace frente a la vulgarización escolar de los *Elementos* en el siglo XVIII español. En las Advertencias que encabezan la obra (págs. 1-16) se dice que ha dispuesto esta traducción el Conde de O'Reilly, Inspector General de Infantería del Rey, como parte de su plan para cimentar el estudio de la ciencia en las obras de los autores originales. También se deja constancia de la superioridad de esta nueva versión sobre las ya existentes, bien porque éstas parten de texto incorrecto o alterado, bien porque son compendios o rudimentos de geometría. El traductor declara su propósito de acomodar, llegado el caso, las expresiones de Simson a la terminología establecida en nuestro país y adelanta, en fin, algunas nociones y términos de uso corriente entre los geómetras españoles. No faltan indicios de que era una persona ilustrada y competente en matemáticas. El prólogo de Simson (págs. 17-20) denuncia varias alteraciones del texto introducidas por Teón, aparte de las añadidas luego por la tradición arábigo-latina y por Campano, y expresa su intención de ofrecer un Euclides depurado. Al mismo propósito obedecen las notas que Simson agrega al final (págs. 295-360), fundadas en el cotejo personal de fuentes griegas y en «la restitución de su fuerza a las pruebas», bases que le permitirán incluso corregir en algún punto al propio Commandino. Lo cierto es, sin embargo, que las intenciones de depuración y preservación del «texto original» cuajan con desigual fortuna: el interés por la reconstrucción racional de las pruebas euclídeas suele prevalecer sobre la sabiduría hermenéutica. Por

otra parte, Simson tampoco renuncia a cierto eclecticismo en las definiciones y en los axiomas del libro I, así como en su reelaboración del libro V. En el caso de I, por ejemplo: «I. Punto o signo es lo que no tiene partes, o lo que no tiene magnitud»; «7. Superficie plana es aquella en la cual tomados dos puntos cualesquiera, la recta terminada por ellos se halla toda en la misma superficie» (def. procedente de Herón)[74]; «35. Paralelas o equidistantes son las rectas que estando en un mismo plano, prolongadas por ambas partes al infinito, jamás se encontrarán». Los axiomas, por otro lado, se dicen referidos a cantidades y los dos últimos, 11 y 12, son, respectivamente, los postulados de la igualdad de los ángulos rectos y de las paralelas; a propósito de éste último, reconoce su denominación como «postulado» y asegura que ni debe contarse entre los axiomas ni admite demostración: lo único que precisa es explicación (*vid.* nota a I, 9, pág. 299). En el libro V, al que dedica especial atención, Simson introduce cuatro axiomas de propia cosecha sobre las relaciones de igualdad y desigualdad en términos de «multíplices»[75] y varias proposiciones adicionales. Por lo que concierne al cuerpo de las proposiciones, los cambios debidos a Simson son de tres clases principales: a) Enunciaciones reformuladas o aclaradas (e. g., I, 2, 7, 11, 42, 44, 47). b) Pruebas modificadas o introducidas en orden a la consideración de casos (e. g., III, 13, 21, 35; proposiciones A-D añadidas a V, 6); pruebas alteradas para evitar la consideración de casos (e. g., I, 24, 35); opción por pruebas alternativas (e. g., III, 23, en línea con Clavio; V, 18, para evitar

---

[74] Esta sustitución de la definición euclídea por otra «más clara», según alega SIMSON en la nota correspondiente (*op. cit.*, pág. 295), no es muy afortunada; cf. T. L. HEATH, ed. cit., 1926², I, pág. 172.

[75] Los axiomas son éstos: «I. Las cantidades equimultíplices de una misma cantidad o de cantidades iguales son entre sí iguales», «II. Las cantidades, de quienes una misma cantidad es equimultíplice o cuyas equimultíplices son iguales, son también iguales entre sí», «III. La multíplice de una cantidad mayor es mayor que la equimultíplice de una menor», «IV. La cantidad, cuya multíplice es mayor que la equimultíplice de otra, es mayor que ésta».

la suposición ilegítima del cuarto término proporcional). c) Adición de corolarios (e. g., a I, 11, 15, 32, 45).

En suma, la versión de Simson no es tanto una traducción como una edición desarrollada sobre la base del texto latino de Commandino. Su traslado al español sitúa el conocimiento hispano de los *Elementos* al nivel de la crítica matemática e histórica europea del momento. Además tiene el interés añadido de revelarnos la existencia de una terminología geométrica relativamente asentada, libre de los arcaísmos tradicionales («ambligonio», «oxigonio», etc.), e incluso provista de cierta capacidad creadora a veces más afortunada (e. g., al formar la correlación «tántupla de... cuántupla de ...», a partir de «tan multíplice... cuan multíplice»), a veces menos (e. g., en el uso de «quindecágono» pese a conocer «pentadecágono»).

Las conclusiones que podamos entresacar de todo este material serán, desde luego, más significativas para la historia de la matemática española que para la historia de los *Elementos* euclídeos. Está clara, sin ir más lejos, la existencia de tres vías al menos de «ilustración» geométrica: la institucional o de inspiración real, representada por la Casa de Contratación (Zamorano) y la Academia de Matemáticas (Rojas, Cedillo, Carduchi); la militar (Vibario, Fernández Medrano; más tarde, Larrando, Deu); la desarrollada al hilo de la implantación académica de los jesuitas (en el Colegio Imperial que absorbe la Academia: Carduchi, Kresa; en el Seminario de Nobles: Álvarez). No son líneas completamente inconexas o aisladas, pero es una lástima que no tejan la trama de una verdadera tradición y cada traductor se crea autorizado —cuando no obligado— a comenzar de nuevo para cortar el traje, a fin de cuentas, por el mismo patrón: los libros I-VI (XI-XII), una geometría básica de planos y sólidos. Sería exagerado pintar la situación con el tenebrismo dolido y provocador de un Eche-

garay o un Rey Pastor, es decir: como si la matemática española de entonces sólo hubiera producido, en esta ámbito, las populares «geometrías de sastres» [76]. Pero, desde luego, bien podemos lamentar que unos principios tan prometedores como los sentados por la traducción de Zamorano no hallaran continuación en su momento bien por su parte, bien por la de otros.

La última fase de la historia de las traducciones y versiones en español de los *Elementos* está representada por las ediciones hechas en nuestro siglo antes de la edición presente. Son las tres que siguen.

F. Enriques y colaboradores, *Los Elementos de Euclides y la crítica antigua y moderna*. Libros I-IV. Traducidos de la edición italiana por José Mingot-Shelley, Madrid, C.S.I.C. (Colección Textos Clásicos), 1954.

Es una versión española del vol. I de esta edición italiana (Roma, 1925) dirigida por Federigo Enriques. El propio Enriques, en el prefacio (págs. 9-11), manifiesta un doble propósito: el de contribuir a la formación en la crítica histórica y comparativa de textos mediante el examen de mo-

[76] La descalificación de la producción matemática del siglo xvii en el esos términos, *i.e.* como si se hubiera reducido a «libros de cuentas y geometrías de sastres», procede del discurso de recepción de José Echegaray en la Academia de Ciencias (11 de marzo de 1866); *vid.* la compilación de Ernesto y Enrique García Camarero, *La polémica de la ciencia española*, Madrid, 1970, pág. 176. Es reiterada al pie de la letra por Rey Pastor, op. cit., 1926, pág. 133. No estaría de más, siquiera para no precipitarse en caricaturas y en juicios de valor, que una revisión general e interdisciplinaria de la historia de la matemática española de estos siglos (xvi-xviii) acompañara a las recientes revisiones de la modernización española en otros ámbitos.

delos clásicos; el de hacer una divulgación de los *Elementos* suficientemente fiel, para apreciar el sabor de la obra griega, y suficientemente libre, al adoptar expresiones geométricas más directas y familiares para nuestros oídos. El texto griego de base es la edición crítica de Heiberg. Una breve introducción (págs. 15-21) da noticia de la tradición cultural griega y de los *Elementos* de Euclides, y se cierra con una selección bibliográfica. Los tres tipos de principios (términos, postulados, nociones comunes), en general, y casi cada uno de estos principios en particular se presentan con referencias históricas y acotaciones críticas a la luz del desarrollo moderno de la geometría. Referencias similares acompañan así mismo a muchas proposiciones de los libros I-IV. Algunas peculiaridades de esta versión pueden ser: En la última definición o «término», 23: *paralelas*, se omite la determinación «indefinidamente (o al infinito)» de la prolongación de las rectas. Entre las nociones comunes, se incluyen sin reticencias las que Heiberg juzga interpoladas; la noción común 7 es singular: «Y las unidades (?) de una misma cosa son iguales entre sí» y la 8 tiene una lectura demasiado sabia: «Y las cosas que se superponen una a la otra son iguales entre sí»; en fin, a propósito de 9: «Y dos rectas no comprenden un espacio», Enriques considera que está posiblemente trastocada y debería ponerse entre los postulados como complemento del postulado 1 (por lo demás, la asume sin reparos en la prueba de I, 4). Esta edición, en general, guarda un lejano aire de familia con la edición de Heath, autor al que alguna vez también se cita. Pero las deudas de Enriques con la historiografía tradicional son más acusadas: mantiene la atribución del punto-mónada al pitagorismo antiguo (en la onda de Tannery); la relación de los postulados con las construcciones y demostraciones de existencia (en la onda

de Zeuthen); la afinidad del genio griego con el ideal de finitud-perfección (en la onda de los que venían popularizando la imagen de una Weltanschauung clásica apolínea). La traducción española, por último, no siempre es muy afortunada.

Euclides, *Obras completas. Elementos de Geometría.* Vol. I: Libros I y II. Versión directa, introducción y notas de J. David García Bacca, México, UNAM [Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum Mexicana], 1944. Vol. II: Lib. III-V. Versión, prólogo y notas de José Álvarez Lasso, México, UNAM, 1956.

El vol. I comienza con una «Introducción filosófica» de García Bacca (págs. ix-xcii). Sigue una versión parcial y selectiva de D. Hilbert (1899): *Fundamentos de Geometría* (págs. 31-32). Luego, tras unas notas y advertencias sobre la traducción (págs. 37-40), aparece la edición bilingüe (en griego y español) de los dos primeros libros de los *Elementos* (pág. 4 ss.): el texto griego y el aparato crítico incluido a pie de página están tomados de Heiberg; pueden confrontarse con la traducción impresa en la página opuesta, donde salta a la vista el interés de García Bacca por explicitar cada uno de los pasos que conforman el proceso deductivo de las proposiciones. Las notas se remiten al final (págs. 167-178): en las noticias y comentarios se deja sentir el peso de Enriques.

El vol. II se inicia con un prólogo (págs. ix-xvii) que asegura la continuidad de la labor de Álvarez Lasso con el patrón establecido en el vol. I por García Bacca. Y efectivamente, se mantienen la edición bilingüe, la reproducción del texto y aparato de Heiberg, su traducción correlativa y el despliegue metódico de las proposiciones. Las notas (págs. 231-238), aunque suelen ser más circunspectas, añaden a la información procedente de Enriques algunas referencias a Simson.

Esta edición tiene dos rasgos llamativos: uno es el calado especulativo de la introducción filosófica del propio García Bacca —cuyas contribuciones a la filosofía actual de habla hispánica no es preciso resaltar aquí—. García Bacca ensaya una contextualización de tres formas o fases principales de la geometría («intuitiva» o preeuclídea, «formal» o euclídea, «transcendental» o no euclidiana) por referencia a ciertas categorías conceptuales: no es nada fácil reconocer la historia real en este teatro de ideas. A continuación dedica otro apartado al «Mundo euclídeo» con notables intuiciones y sugerencias, aunque el autor recaiga en el tópico de «la finitud y la delimitación» —como una presunta característica esencial de la mentalidad helénica—, y acuse el lastre de la hermenéutica tradicional heredada del pasado siglo. El segundo rasgo notable de esta edición es la pretensión —compartida por ambos traductores— de sacar a la luz y definir cabalmente la lógica que suponen subyacente en las pruebas euclídeas. Ahora los supuestos interpretativos que guían el análisis se tornan por su propio carácter técnico algo más precisos, pero no siempre resultan más verosímiles: por ejemplo, no tienen mucho fundamento ni el nexo alegado entre la deducción euclídea y la lógica estoica, ni la atribución a Euclides del uso de una regla de la moderna lógica cuantificacional como la regla de sustitución.

Por lo que se refiere a la versión del texto euclídeo, se plantea como una empresa rigurosa y de notable esfuerzo. Cabe anotar la inclusión formal de la noción común IX: «Y dos rectas no circundan región», y su empleo en I, 4, por más que estén desautorizados en el texto griego correlativo por el aparato crítico de Heiberg; lo mismo ocu-

rre en algún otro caso, como el de la proposición I, 40, que Heiberg (1903) había descartado a la luz del papiro Fayûm. Pero los autores no se paran a explicar los posibles desajustes de este tipo entre la fuente crítica griega y su versión española. La traducción se mueve, en general, entre la presión de la literalidad y la presión de la explicitación moderna. La primera se trasluce en algunos giros y expresiones de un español un tanto pintoresco. La segunda se advierte en ciertas versiones sesgadas o sabias, e. g., Def. 1: «punto es lo que ya no tiene partes» (cf. nota 1, pág. 167); noción común VII: «Y las cosas congruentes entre sí son iguales entre sí». En cualquier caso, el título general de la edición anuncia una obra todavía en ciernes pero de singular empeño dentro de la (escasa) literatura euclídea disponible en nuestra lengua.

Científicos griegos. Recopilación, estudio preliminar, preámbulos y notas de Francisco VERA, Madrid, Aguilar (Col. Grandes Obras), 1970; 2 vols. Euclides: *Elementos de Geometría,* vol. I, págs. 702-980.

Francisco Vera se ha dado a conocer especialmente por sus contribuciones al desarrollo de la historiografía de la matemática española. Esta versión viene precedida de un preámbulo con noticias sobre Euclides y sus obras, donde Vera, naturalmente, presta especial atención a la significación de los *Elementos* y a sus ediciones y versiones; hay al final una selección bibliográfica —no muy accesible ni actualizada—. Es una lástima que algunas erratas de imprenta den lugar a confusiones y a equivocaciones de bulto. Por fortuna, la versión de los *Elementos* ha tenido una impresión mucho más cuidada.

No se menciona el texto griego tomado como fuente de la traducción. Parece tratarse, en general, de la edición

de Heiberg; aunque Vera no reconoce la interpolación de las nociones comunes 4-6 y 9 —a propósito de esta última dice (nota 21, pág. 705): «Algunos editores, con excelente criterio, consideran esta noción común como un sexto postulado que completa el de paralelismo»—; tampoco hay ninguna observación acerca de otras proposiciones intercaladas, como I, 40. En las notas abundan las referencias a Enriques. Dentro ya del contexto de las proposiciones del libro I, el traductor declara seguir escrupulosamente los *Elementos* habiéndose limitado «a aligerar un poco el texto, suprimiendo palabras superfluas y, desde luego, la inútil repetición literal del enunciado antes de decir que era lo que se quería demostrar» (nota 26, pág. 708). El resultado es, sin embargo, una versión libre, sintética y modernizada por regla general. Esta versión se ajusta sustancialmente al texto estándar en los libros I-VI. Pero a partir de VII se acentúan las distancias motivadas por la simplificación; en la nota 1 (pág. 829), Vera habla de la «inelegancia» de algunas demostraciones, de la «dificultad de seguir el camino del razonamiento a través de la manigua de palabras»: es un aviso de que nos vamos a encontrar proposiciones con pruebas abreviadas y enunciados sin prueba. Al parecer, entre los motivos que obran en estas omisiones se cuentan: a) la sustitución de la prueba euclídea por una formulación moderna o por la indicación del procedimiento a seguir (e. g., VII, 3, 6-9, 11, 15, 19-22, 27-29, 36); b) la analogía de la prueba omitida con alguna otra anterior (e. g., VII, 2, 12, 33); c) el ser un teorema recíproco o converso de la proposición anterior (e. g., VII, 30); d) ningún motivo en especial (e. g., VII, 10, 17-18, 32, 35, 37-39). La situación en los libros VIII-IX es muy similar. Parece agravarse en el libro X (págs. 860 ss.), donde el editor alude a su importancia como documento históri-

co, al tiempo que recuerda la posibilidad de obtener sus resultados por medio de unas pocas reglas algebraicas: en suma, la tercera parte de las proposiciones del libro se queda en los puros enunciados; ni una mención siquiera llega a merecer el sustancial corolario de X, 111 sobre las clases de rectas irracionales. La situación mejora en XI-XIII, aunque no falten omisiones ocasionales de pruebas, bien porque se juzgan innecesarias (e. g., XI, 7; XII, 6, 10, 17-18), bien por su analogía con pruebas anteriores (e. g., XI, 8, 34; XII, 8, 11; XIII, 2). Por lo demás, del tratado ha desaparecido la tradicional alusión a los principios o a proposiciones previas en determinados pasos de las pruebas y no se respeta mucho la lógica interna de las proposiciones euclídeas. En realidad, esta edición de los *Elementos de Geometría* de Euclides no constituye una traducción de los *Elementos*, sino una versión clara, suelta y aproximada al lector de hoy, con las simplificaciones que quizás se consideran convenientes en el marco de una edición antológica que procura facilitar el acceso del público hispano a los textos científicos griegos.

UNA SELECCIÓN BIBLIOGRÁFICA

En las notas ya he dado referencias bibliográficas sobre aspectos generales y sobre puntos concretos relacionados con Euclides y, en particular, con los *Elementos*. Por eso en esta breve selección final me limitaré a recordar algunos títulos de especial interés; serán, además, estudios que en mayor o menor medida difieren entre sí —aunque puedan complementarse—, con el fin de evitar duplicaciones innecesarias. Distribuiré estas obras en tres grupos:

A. Para hacerse una idea del contexto general en que aparecen los *Elementos*, cabe acudir en principio a una selección de textos matemáticos griegos, como la edición bilingüe (en griego e inglés) de I. THOMAS, ed., *Selections of Greek Mathematics*, Londres-Cambridge (Mass.), 1939, 1967 3.ª reimp.; también puede verse J. FAUVEL y F. GRAY, eds., *The History of Mathematics: A Reader*, Basingstoke-Londres, 1987, 2-6, págs. 46-239. El estudio de P. TANNERY (1887), *La géométrie grecque. I: Histoire de la géométrie élémentaire*, Hildesheim-Zurich-Nueva York, 1988, reimp., tiene la intuición y los encantos del pionero. Pero hoy debería cotejarse con T. L. HEATH (1921): *A history of Greek Mathematics*, Nueva York, 1981, reimp., 2 vols.; CH. MUGLER, *Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des Grecs*, París, 1958-1959 (disponible en microfichas: Klincksieck EC 28-9). También habrá que tener en cuenta los diversos aspectos de las tradiciones previas y del marco de los *Elementos* que han sugerido o desarrollado A. SZABÓ (1969): *The Beginnings of Greek Mathematics*, Dordrecht-Budapest, 1978; W. R. KNORR, *The Evolution of the Euclidean Elements*, Dordrecht-Boston, 1975, y *The Ancient Tradition of Geometric Problems*, Boston, 1986; D. H. FOWLER, *The Mathematics of Plato's Academy. A New Reconstruction*, Oxford, 1987. Acerca de las teorías, las tradiciones y las prácticas griegas de la prueba, puede verse L. VEGA, *La trama de la demostración. (Los griegos y la razón tejedora de pruebas)*, Madrid, 1990.

B. Sobre Euclides y su obra, siempre se encontrará información en cualquier Historia de las matemáticas. En español se puede utilizar, por ejemplo. C. B. BOYER (1968): *Historia de la matemática*, Madrid, 1986, cap. VII, págs. 141-163. Pero son singularmente instructivas las síntesis monográficas de F. O. HULTSCH, «Eukleides» en la PAULY-WISSOWA, *Real Enzyclopädie der klassischen Altertumswissenschaft*, Stuttgart, 1909, reimp. 1970, VI 1, cols. 1003-1052; I. BULMER-THOMAS, «Euclid, Life and Works», en CH. C. GILLISPIE, dir., *Dictionary of Scientific Biography*, Nueva York, 1970-1980, reimp. 1981, vol. 4, págs. 414-437; D. GJERS-

TEN, *The Classics of Science*, Nueva York, 1984, cap. 3, págs. 38-70; A. DOU, «Euclides», en AA.VV., *Historia de la matemática hasta el siglo XVIII*, Madrid, 1986, págs. 61-78.

C. En fin, por lo que concierne al texto y a la constitución interna de los *Elementos*, conviene recordar los trabajos clásicos de J. L. HEIBERG, «Paralipomena crítica», en la edición J. L. HEIBERG, H. MENGE, *Euclidis opera omnia*, tomo V (Leipzig, 1888), págs. xxiii-cxiii [recogido en la edición rev. de E. STAMATIS, *Euclidis Elementa*, tomo V (Leipzig, 1977), págs. xvi-lxxxix]; y «Paralipomena zu Euklid», *Hermes* 38 (1903), 46-74, 161-201, 321-356. De las observaciones y los procedimientos de Heiberg, también da noticia la fuente de información más completa que hoy existe sobre los *Elementos*, la edición inglesa de T. L. HEATH (1908, 1926): *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Nueva York, 1956, 3 vols. Algunas referencias han de actualizarse; por ejemplo, a la luz de J. E. MURDOCH, «Euclid. Transmission of the *Elements*», en CH. C. GILLISPIE, dir. (1970-1980, reimp. 1981), *Dictionary of Scientific Biography*, op. cit., vol. 4, págs. 437-459. La reconstrucción más comprensiva de la estructura deductiva interna de los *Elementos* es la ofrecida por I. MUELLER, *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*, Cambridge (Mass.)-Londres, 1981.

LUIS VEGA

ELEMENTOS

NOTA SOBRE LA PRESENTE TRADUCCIÓN

La presente traducción sigue el texto griego fijado por J. L Heiberg en la edición de J. L. Heiberg y H. Menge, *Euclidis Opera omnia,* vols. I-IV, Leipzig, 1883-1886. También he utilizado la revisión hecha por E. S. Stamatis, *Euclidis Elementa,* vols. I-IV, Leipzig, 1969-73. El texto de Stamatis es ligeramente más conservador. En los muy contados casos de discrepancia entre Heiberg y Stamatis asumo las atétesis justificadas por Heiberg.

Dada la importancia sustancialmente histórica que hoy reviste para nosotros el lenguaje de los *Elementos,* he procurado mantener su expresividad original, en la medida de lo posible, y me he guardado de dar la falsa imagen de una terminología técnica que corresponderá más bien a momentos posteriores de desarrollo de la matemática, o de producir la falsa impresión de que el texto compartía ya la terminología estándar que hoy nos resulta familiar.

LIBRO PRIMERO

DEFINICIONES

1. Un punto es lo que no tiene partes [1].
2. Una línea es una longitud sin anchura.
3. Los extremos de una línea son puntos.

---

[1] La definición recoge la idea tradicional de punto como aquello que es indivisible en partes. Pero no incurre en el vicio que Aristóteles atribuye a las definiciones habituales en su tiempo, el de definir lo anterior por referencia a lo posterior: el punto como límite de la línea, la línea como límite de la superficie, la superficie como límite del cuerpo sólido (*Tóp.* VI 4, 14b15-27). También es significativa la opción de Euclides por el término *sēmeîon* para designar el punto. Los pitagóricos habían legado el término *mónas* para indicar la unidad tanto aritmética como geométrica: cuando el contexto lo exigía, la unidad aritmética podía precisarse como *mónas áthetos* (unidad sin posición) y la unidad geométrica como *mónas thésin ékhousa* (unidad con posición) (*vid.* ARISTÓTELES, *Metaf.* Δ 6, 1016b14-26; PROCLO, *Com.* 95, 12). Pero en la primera mitad del siglo IV a. C. habían empezado a imponerse otras dos denominaciones del punto tomadas al parecer del lenguaje corriente: *stigmḗ*, que significaba originariamente «marca», «punción», y *sēmeîon*, que tenía el significado de «signo», «señal» y otros asociados (e. g., «presagio», «síntoma»). Al parecer, en la tradición filosófica prevalece más bien el uso del primero, y en la tradición matemática el uso del segundo. Aristóteles suele emplear *stigmḗ* en el contexto de discusiones filosóficas (e. g., *Me-*

4. Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella [2].

---

taf. A 9, 992a20-24; *Fís.* 2, 1, 231a24-26) y recurrir a *sēmeîon* cuando
cita proposiciones geométricas (e. g., *Meteor.* Γ 3; 373a3-5; 5, 376a8-9).
Por otra parte, los grandes textos geométricos del siglo III, empezando
por los *Elementos,* emplearán *sēmeîon* de forma casi sistemática —un
uso parecido se encuentra ya en los tratados astronómicos de Autólico—.
Más tarde, en los escritos de los comentadores, se olvida esta especializa-
ción técnica y reaparece el uso de *stigmḗ* en los contextos geométricos.
Con todo, Alejandro de Afrodisia todavía puede recordar las vicisitudes
de la tradición: «Los elementos primeros del plano son las líneas, y de
las líneas los puntos [*stigmai*], que los matemáticos llaman *puntos* [*sē-
meîa*] y ellos ‹los pitagóricos› mónadas [*mónades*]» *(In Metaf.* 55, 20;
Ross, *Arist. fragm.*, fr. 2). Para más detalles, *vid.* V. Vita, «Il punto
nella terminologia matematica greca», *Archive for History of Exact Sciences*
27-2 (1982), 101-114; sobre otras definiciones antiguas y modernas del
punto geométrico, *vid.* T. L. Heath, *The Thirteen Books...*, ed. cit.,
1926², I, págs. 155-158. A propósito de éste y de otros muchos términos,
también puede cotejarse Ch. Mugler, *Dictionnaire historique de la ter-
minologie géométrique des Grecs,* París, 1959.

[2] Los griegos se formaron tres representaciones básicas de la línea
recta: la de un hilo tenso, la de un rayo de luz, la de un eje o lugar
de los puntos que se mantienen inmóviles en un cuerpo fusiforme suspen-
dido por ambos extremos, *vid.* Ch. Mugler, «Sur l'histoire de quelques
définitions de la géométrie grecque», *L'antiquité classique* 26 (1957),
331-345. Las tres imágenes se combinan para describir la luz celeste y
el huso de la necesidad en el mito de Er de la *República* de Platón (X
616b-c). De hecho, estas representaciones subsisten en algunas caracteri-
zaciones de la línea recta que hoy conservamos de los griegos. La tensión
[*tásis*] está asociada a la definición de la recta como una línea tendida
o estirada [*tetaménē*] hacia los puntos (Proclo, *Com.* 110, 18) o hacia
los extremos (Pappo, *Def.* 4). La imagen del rayo óptico está presente
en la conocida definición platónica de la recta como la línea cuyo medio
intercepta (eclipsa [*epíprosthen*]) ambos extremos, vid. *Parménides* 137e.
La tercera imagen se trasluce en la definición de Herón recogida por
Proclo: «una línea que permanece fija cuando sus extremos permanecen
fijos» *(Com.* 110, 21-22). Suele considerarse que la definición de Euclides
es una elaboración de la platónica, pues ésta contendría implícitamente

5. Una superficie es lo que sólo tiene longitud y anchura [3].

---

una alusión al sentido de la vista y supondría, asimismo, una asimilación
del rayo visual al rayo óptico, connotaciones que Euclides procura evitar.
Vid., por ejemplo, T. L. Heath, ed. cit., I, 1926², pág. 166; en cambio,
Mugler, art. cit., 1957, pág. 336, discute esta implicación visual de la
definición de Platón. En cualquier caso, la definición euclídea parece ori-
ginal, pues, aparte de la definición citada del *Parménides* de Platón, sólo
hay constancia de otra definición anterior, recordada y criticada por Aris-
tóteles: la línea es el límite de la superficie *(Tóp.* VI 4, 141b21). También
ha llamado la atención la construcción lingüística de la definición: *ex
ísou toîs eph' heautês sēmeíois keîtai*, en particular el empleo de la expre-
sión adverbial *ex ísou*. Es una expresión frecuente en Platón y en Aristó-
teles, y suele tener el sentido de «por igual», «en pie de igualdad». Cabe
considerar que el dativo *toîs... sēmeíois* está relacionado con *ex ísou* o
con *keîtai:* en el primer caso, resulta la versión adoptada aquí; en el
segundo caso se diría más bien que la línea recta está simétricamente
determinada por sus puntos, noción que envuelve un aspecto de direc-
ción. Los geómetras griegos, efectivamente, se refieren a la línea AB o
a la línea BA como a una misma línea. Pero es dudoso que esta identifi-
cación intuitiva descanse en alguna suposición de simetría o de reversibi-
lidad —la conciencia de éstos y otros presupuestos lógicos sólo irá aflo-
rando con el desarrollo moderno de la geometría euclidiana—. Por lo
demás, esta definición euclídea de línea recta es un intento de explicar
una noción tan simple que se resiste a una formulación cabal y precisa,
y la misma suerte espera a otros ensayos en el mismo sentido. No obstan-
te, si alguna definición griega ha tenido especial fortuna, ha sido la apor-
tada por Arquímedes como una de las asunciones de *Sobre la esfera y
el cilindro:* «la recta es la más corta [*elakhístē*] de todas las líneas que
tienen los mismos extremos».

[3] La palabra *epipháneia* fue usada por Euclides y escritores posterio-
res para denotar «superficie» en general, mientras que *epípedon* se utilizó
para significar «superficie plana» (vid. *infra*, Def. 7). *Epipháneia* parece
haber designado originariamente la apariencia visible de un cuerpo sóli-
do; los pitagóricos llaman a la superficie *(chro(i)á, i. e.* «piel», como
testifica Aristóteles *(Acerca de la sensación* 3, 439a31), aunque olvida
el significado anterior de *chro(i)á* y le da el de *color*, que había prevaleci-
do posteriormente. Con todo, el primer testimonio del uso de *epipháneia*

6. Los extremos de una superficie son líneas.
7. Una superficie plana es aquella que yace por igual respecto de las líneas que están en ella [4].
8. Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta [5].

---

en un contexto geométrico bien podría ser el del frag. 68 B 155 de Demócrito. Platón y Aristóteles emplean indistintamente este término y *epípedon* para designar la superficie. El uso de *epiphaneia* se fija con Autólico y Euclides. La definición sienta su carácter bidimensional y la Def. 2 del libro XI establecerá su condición de límite del cuerpo sólido: ambos aspectos de la superficie eran familiares para Aristóteles (*vid.*, e. g., *Tóp.* VI 4, 141b22; *Metaf.* M 9, 1085a11).

[4] Esta definición, como puede apreciarse fácilmente, está calcada sobre la Def. 4 *mutatis mutandis:* «línea recta» y «puntos» son reemplazados por «superficie plana» y «rectas», respectivamente. Por lo demás, no es extraño que las nociones asociadas a la línea recta se quieran extender a la superficie plana, e. g.: la superficie plana es «la tendida o estirada», «la menor superficie de todas las que tienen los mismos límites» (*vid.* Proclo, *Com.* 117, 2-13). Sobre los problemas derivados y otras cuestiones conexas, *vid.* T. L. Heath, ed. cit., 1926², 1, págs. 172-176.

[5] La expresión *mè ep' eutheías keiménōn*... («y no están en línea recta») resulta sorprendente, teniendo en cuenta que el ángulo puede estar formado por rectas o curvas. Parece como si Euclides hubiera pensado al principio definir el ángulo rectilíneo y hubiera tomado después en consideración los ángulos formados por una recta y una curva o por dos curvas, con lo que se ve llevado a sustituir «líneas rectas» por «líneas».

Al parecer, el uso de *klísis* «inclinación» es una innovación de Euclides, frente a la tradición anterior presente en Aristóteles que relacionaba el ángulo con la idea de «fractura» *klásis*. Para otras definiciones, *vid.* Heath, ed. cit., 1926², 1, págs. 176 ss. Por otra parte, Euclides considera solamente los ángulos convexos (menores que dos rectos), lo mismo que en la definición 19 sólo se refiere a polígonos convexos. Aunque los griegos sólo tomaron en consideración los ángulos y polígonos convexos, se encuentra la distinción entre las dos clases en la definición 34 de Herón y en el comentario de Proclo (Proclo, *Com.* 165, 21) se trata de polígonos cóncavos con ángulos entrantes.

9. Cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas el ángulo se llama rectilíneo.
10. Cuando una recta levantada sobre otra recta forma ángulos adyacentes [6] iguales entre sí, cada uno de los ángulos iguales es recto y la recta levantada se llama perpendicular a aquella sobre la que está.
11. Ángulo obtuso es el (ángulo) mayor que un recto.
12. Ángulo agudo es el (ángulo) menor que un recto.
13. Un límite es aquello que es extremo de algo [7].
14. Una figura es lo contenido por uno o varios límites.
15. Un círculo es una figura plana comprendida por una línea [que se llama circunferencia] tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí [8].

---

[6] *Ephexês, i. e.* «en serie», «uno tras otro» es la palabra utilizada generalmente para ángulos adyacentes.

[7] Límite: *hóros;* extremo: *péras.*

[8] *Hè kaleîtai periphéreia* («que se llama circunferencia») se considera una interpolación, al igual que la frase no traducida: *pros tén toû kyklou periphéreian* («hacia la circunferencia del círculo»), que aparece en algunos mss. hacia el final de la definición. Heiberg las suprime porque, a pesar de que esos mss. las tienen, las fuentes más antiguas (Proclo, Tauro, Sexto Empírico, Boecio) las omiten. El descubrimiento del papiro Herculanense núm. 1061 que presenta también la definición sin las palabras en cuestión confirma la postura de Heiberg (*vid.* J. L. Heiberg, «Paralipomena zu Euklid», *Hermes* XXXVIII [1903], 47). Las palabras fueron añadidas seguramente debido a la aparición de *periphéreia* «circunferencia» en las definiciones 17 y 18 sin ninguna explicación. Pero en realidad no es necesaria. Pues, aunque la palabra no aparece en Platón, Aristóteles la utiliza varias veces:

1. En el sentido general de «contorno», sin un significado específicamente matemático.

2. En sentido matemático, para referirse tanto a la circunferencia como a un arco o a un círculo.

Por eso Euclides podía usar perfectamente la palabra en las definiciones 17 y 18 sin definirla, porque se trataba de una palabra universalmente

16. Y el punto se llama centro del círculo.

17. Un diámetro del círculo es una recta cualquiera trazada a través del centro y limitada en ambos sentidos por la circunferencia del círculo, recta que también divide el círculo en dos partes iguales [9].

18. Un semicírculo es la figura comprendida entre el diámetro y la circunferencia por él cortada. Y el centro del semicírculo es el mismo que el del círculo.

---

conocida y que no tenía de suyo referencia matemática. Debe añadirse que Al-Nayrīzī no incluye en su texto las palabras suprimidas por Heiberg e intenta explicar la omisión de la palabra circunferencia.

Por otra parte, la definición de círculo no contiene nada nuevo en sustancia. **Platón** en *Parménides* 137e dice: *strongýlon ge poú esti toúto, hoû àn tà éschata pantachêi apò toû mésou íson apéchei*: «Redondo es aquello cuyos extremos están en todas las direcciones a igual distancia del medio». En Aristóteles encontramos las siguientes expresiones: «La figura plana rodeada por una línea circular» *peripherógramon (De caelo* II 4, 286b13-16); «Plano regular desde un centro [*epípedon tò ek toû mésou íson*]» *(Retórica* III 6, 1407b27) refiriéndose al círculo. Compara también con el círculo «cualquier otra figura que no tenga iguales las líneas desde el centro, por ejemplo una figura ovalada» *(Sobre el cielo* II 4, 287a19).

La palabra *kéntron*, «centro» se usaba también regularmente: *vid.* la referencia de Proclo a los *lógia* «oráculos» que declaran: «el centro desde el que todas las (líneas tendidas) hasta el borde son iguales...» *(Com.* 155, 4-5).

[9] *Diámetros* es la palabra empleada regularmente por Euclides también para cuadrados y paralelogramos. *Diagṓnios*, «diagonal» es un término tardío definido por **Herón** *(Def.* 67) como la línea recta dibujada de un ángulo a otro. Las últimas palabras «recta que también divide al círculo en dos partes iguales» son omitidas por Simson y los editores que le siguen. Pero son necesarias aunque no pertenecen a la definición sino que sólo expresan una propiedad del diámetro tal como ha sido definido. Pues, sin esta explicación, Euclides no habría tenido justificación al definir un semicírculo como una porción de círculo limitada por el diámetro y la circunferencia cortada por él.

19. Figuras rectilíneas son las comprendidas por rectas, triláteras las comprendidas por tres, cuadriláteras las comprendidas por cuatro, multiláteras las comprendidas por más de cuatro rectas [10].

20. De entre las figuras triláteras, triángulo equilátero es la que tiene los tres lados iguales, isósceles la que tiene sólo dos lados iguales, y escaleno la que tiene los tres lados desiguales [11].

21. Además, de entre las figuras triláteras, triángulo rectángulo es la que tiene un ángulo recto, obtusángulo la que tiene un ángulo obtuso, acutángulo la que tiene los tres ángulos agudos.

22. De entre las figuras cuadriláteras, cuadrado es la que es equilátera y rectangular, rectángulo la que es rectangular pero no equilátera, rombo la que es equilátera pero no rectangular, romboide la que tiene los ángulos y lados opuestos iguales entre sí, pero no es equilátera ni rectangular; y llámense trapecios las demás figuras cuadriláteras [12].

---

[10] La distinción entre figuras triláteras, cuadriláteras y multiláteras es probablemente una aportación del propio Euclides. *Trípleuron, tetrápleuron, polýpleuron* no aparecen en Platón ni en Aristóteles. Con el uso de *tetrápleuron*, Euclides acaba con la ambigüedad del término *tetrágōnon* que empieza a utilizarse restrictivamente para el *cuadrado*.

[11] *Isoskelés* («de piernas iguales») es usado por Platón y Aristóteles. *Skalenós* con su variante *skalenés* lo usa Aristóteles para referirse a un triángulo que no tiene dos lados iguales. Platón utiliza el término *scalenós* para un número impar por oposición a *isoskelés* para un número par. Proclo pone en relación *scalenós* con el verbo *skázō* («cojear»). Otros lo relacionan con *skoliós*, *i. e.* «torcido», «defectuoso».

[12] Cuadrado: *tetrágōnon*. *Tetrágōnon* designaba ya el cuadrado entre los pitagóricos *(vid.* Aristóteles, *Metafísica* 986a26). Y este mismo significado es el más frecuente en Aristóteles; pero en *Sobre el alma* II 3, 414b31, parece significar «cuadrilátero»; por otra parte, la alusión de *Metafísica* 1054b2, a *tetrágōna* «iguales» y «equiangulares» ha de referirse a cuadri-

23. Son rectas paralelas las que estando en el mismo pla-
no y siendo prolongadas indefinidamente en ambos
sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno
de ellos [13].

---

láteros para que «equiangular» alcance a tener algún sentido. Aunque
al introducir *tetrápleuron* para designar el cuadrilátero Euclides permitió
evitar la ambigüedad, hay huellas del antiguo uso de *tetrágōnon* en auto-
res mucho más tardíos.

La palabra *rómbos* («rombo») parece derivar de *rémbō* («dar vuel-
tas») y se utilizaba para designar, entre otras cosas, la peonza. Arquíme-
des usa la expresión «rombo sólido» para referirse a la figura sólida for-
mada por dos conos con una base circular común. Si los conos son igua-
les, la sección a través del eje común podía ser un rombo plano. Aunque
en Arquímedes los conos no tienen por qué ser iguales, es posible que
el sólido del que fue tomado el nombre originariamente estuviera forma-
do por dos conos iguales y Arquímedes lo habría extendido a otros casos.

[13] *Parállēloí eisin eutheîai, haítines en tôi autôi epipédōi oûsai kai*
ekballómenai eis ápeiron eph' ekátera tà mérē epì mēdétera sympíptousin
allḗlais. Parállēlos, como tal término compuesto, no aparece en Platón,
pero ya tiene un uso habitual en tiempos de Aristóteles. En «*ekballóme-*
nai eis ápeiron (siendo prolongadas *indefinidamente)*», la expresión *eis*
ápeiron se debe tomar en el sentido adverbial indicado, no como si desig-
nara una región o apuntara hacia un lugar («al infinito»); lo mismo cabe
decir de la expresión *ep' ápeiron* que a veces sustituye a la anterior. «En
ambos sentidos» es la versión de *eph' ekátera tà mérē*, cuya traducción
menos libre sería: «hacia ambas partes (por ambas partes)».

Euclides, como ya se señalaba en la introducción general, opta por
la característica de no intersección o no encuentro como criterio determi-
nante de las rectas coplanarias paralelas. No era la única opción conocida
por los griegos ni, al parecer, fue la más frecuente. A primera vista resul-
taba más natural el criterio de equidistancia, preferido por Posidonio
o Gémino, entre otros (Proclo, *Com.* 176, 5 ss.). Conforme a este crite-
rio, son paralelas las rectas coplanarias que no convergen ni divergen
y, así, todas las perpendiculares trazadas de una a otra son iguales. Tam-
bién se ha especulado con un posible criterio de igual dirección, mencio-
nado por Filopón (*vid.* T. L. Heath, ed. cit., 1926², I, págs. 191-192).
En cualquier caso, la opción de Euclides por este criterio de no intersec-
ción y la asunción complementaria del postulado 5, con ser menos intuiti-

POSTULADOS

1. Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cual-
quiera hasta un punto cualquiera [14].
2. Y el prolongar continuamente una recta finita en lí-
nea recta [15].
3. Y el describir un círculo con cualquier centro y dis-
tancia [16].
4. Y el ser todos los ángulos rectos iguales entre sí.
5. Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace
los ángulos internos del mismo lado menores que

---

vas, son más adecuadas y evitan la falacia de probar la existencia de
rectas paralelas sobre la base de algún supuesto derivado justamente de
esa misma existencia —Aristóteles había denunciado una petición de prin-
cipio de este tipo en planteamientos coetáneos de las paralelas, *A. Pr.*
II 16, 65a1-9—. El criterio de no intersección y el criterio de equidistan-
cia convenientemente formulados, resultan lógicamente equivalentes. *Vid.*
R. J. Trudeau, *The Non-Euclidean Revolution*, Boston-Basilea-Stuttgart,
1987, cap. 4, págs. 118 ss.

[14] *Apò pantòs sēmeíou epì pân semeîon...* dice literalmente: «de todo
punto a todo punto». Los griegos, en afirmaciones generales de este tipo,
no decían, como solemos hacer nosotros, «cualquier punto», «cualquier
triángulo», etc., sino «todo punto», «todo triángulo», etc.

[15] Traduzco *peperasménē* por «finita» porque los términos «delimita-
da» o «limitada», aplicados a una recta, se refieren más bien a lo que
nosotros entendemos por un segmento de recta.

[16] *Diástēma*, «distancia», es la palabra usada en geometría para el
radio determinado con que se describe un círculo. Su uso se debe a que
todos los puntos de la circunferencia están a la misma distancia del cen-
tro. Los griegos no tienen un término equivalente a *radio*, normalmente
utilizan la expresión *hai ek toû kéntrou (agómenai grammaí)*, *i. e.* «las
(líneas trazadas) desde el centro». El término «radio», *radius*, aparece
por primera vez en Pierre de la Ramée (P. Ramus, siglo xvi) y se usará
ya comúnmente desde Vieta. Por lo demás, en geometría esférica, *diástē-*
ma hace referencia no sólo al círculo, sino también a la esfera. (Autóli-
co, 6).

dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se
encontrarán en el lado en el que están los (ángulos)
menores que dos rectos [17].

[17] Ninguna proposición de los *Elementos* ha tenido una vida tan agi-
tada como la de este célebre postulado, según se apuntaba ya en la intro-
ducción general. Por lo regular, ha corrido el albur de un estatuto incier-
to. Fue asumido como postulado por la tradición adelardiana y por Cam-
pano, así como por varios editores y comentadores renacentistas, e. g.:
ZAMBERTI (1505), LUCA PACCIOLI (1509), TARTAGLIA (1543), COMMANDINO
(1572). Otros muchos, quizás a partir de la *editio princeps* de GRYNAEUS
(1533), prefieren incluirlo entre las nociones comunes, e. g.: F. CANDA-
LLA (1556), CLAVIO (1574), VITALE (1682), GREGORY (1703). Pero el trance
más radical, el de pasar por una proposición necesitada de prueba, fue
una amenaza que se cernió sobre él desde un principio. «Debe ser borra-
do por completo de los postulados porque se trata de un teorema henchi-
do de dificultades, que Tolemeo se propuso resolver en un libro, y su
demostración requiere varias definiciones y teoremas. Más aún: La pro-
posición conversa es efectivamente demostrada por el propio Euclides
como un teorema» (PROCLO, *Com.* 191, 21 ss.). Proclo alude al parecer
al teorema I 17: la suma de dos ángulos cualesquiera de un triángulo
es menor que dos rectos, pues el postulado 5 equivale a decir que las
rectas, al llegar a encontrarse por el lado correspondiente a los ángulos
cuya suma es menos que dos ángulos rectos, forman un triángulo. «En
el caso presente —continúa Proclo un poco más adelante—, el hecho
de que las rectas convergen cuando los ángulos rectos son minorados,
es cierto y necesario; por contra, la afirmación de que como convergen
más y más a medida que se prolongan, llegarán alguna vez a encontrarse,
es una afirmación verosímil pero no es necesaria a falta de un argumento
que pruebe que esto es verdad acerca de las líneas rectas. Pues el hecho
de que haya algunas líneas que se aproximan indefinidamente pero per-
manecen sin tocarse [*asýmptotoi*], por más improbable y paradójico que
parezca, también es cierto y está completamente comprobado en relación
con líneas de otro tipo. ¿Por qué en el caso de las rectas no es posible
lo mismo que ocurre con las líneas mentadas?» (*Com.* 192, 13-22). Sobre
las fases principales del intento fallido de reducir el postulado, hasta de-
sembocar en el alumbramiento de las geometrías no euclidianas, puede
recordarse la nota (19) de la introducción general. Aquí parece más indi-
cado mencionar algunas de las proposiciones, lógicamente equivalentes

NOCIONES COMUNES

1. Las cosas iguales a una misma cosa son también igua-
les entre sí [18].

al postulado euclídeo, que se fueron explicitando a lo largo del proceso.
Se suelen destacar las siguientes (junto con algún portavoz caracterizado):
(i) La suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a dos án-
gulos rectos (resultado cuya relación con la teoría de las paralelas ya
era conocida en tiempos de Aristóteles, cf. *Elementos* I 32; SACCHERI, 1733).
(ii) Las rectas paralelas son equidistantes (atribuido a Posidonio);
todos los puntos equidistantes de una línea recta, situados a un lado de-
terminado de ella, constituyen una línea recta (CLAVIO, 1574).
(ii′) Dos rectas paralelas guardan entre sí una distancia finita
(Proclo).
(ii″) Las rectas no equidistantes convergen en una dirección y
divergen en la opuesta (THĀBIT IBN QURRA, h. 826-901; CATALDI, 1603).
(iii) Por un punto exterior a una recta sólo cabe trazar una paralela
TOLEMEO; ALHAZEN, h. 965-1041; popularizado por J. Playfair a finales
del siglo XVIII).
(iv) Sobre una recta finita siempre se puede construir un triángulo
semejante a un triángulo dado (J. WALLIS, 1663; A. M. LEGENDRE, 1824);
existe un par de triángulos no congruentes, pero semejantes —con sus
respectivos ángulos iguales— (SACCHERI, 1733).
(v) En todo cuadrilátero que tenga tres ángulos rectos, el cuarto án-
gulo también es recto (A. C. CLAIRAUT, 1741; J. H. LAMBERT, 1766).
(vi) Se puede construir un triángulo cuya área sea mayor que cual-
quier área dada (K. F. GAUSS, 1799).
(vii) Dados tres puntos no alineados, siempre será posible construir
un círculo que pase por todos ellos (A. M. LEGENDRE, 1824, F. BOLYAI,
1832).
(viii) No hay patrón métrico absoluto de longitud (K. F. GAUSS, 1816).
Para más detalles sobre algunas de estas proposiciones y sobre otras
de análoga condición, puede verse T. L. HEATH, ed. cit., 1926², I, págs.
204-220.

[18] Esta proposición es seguramente la más conocida de las nociones
comunes o axiomas —según Proclo, ambas expresiones son sinónimas
para Aristóteles y para los geómetras, aunque los *Elementos* nunca ha-

2. Y si se añaden cosas iguales a cosas iguales, los totales son iguales.
3. Y si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales [19].

blan de «axiomas [*axiómata*]» y Aristóteles prefiere hablar de unos principios [*archai*] o premisas comunes [*tà koinà*] o primordiales [*tà prôta*]—. Sin embargo, la citada con mayor frecuencia por parte de Aristóteles, en particular, es la noción común tercera. Las nociones comunes se distinguen, como es bien sabido, por su calidad de principios no sólo verdaderos y palmarios, sino indemostrables. Con todo y con esto, Apolonio al parecer trató de demostrarlos —confusión que lamenta PROCLO *(Com.* 194, 10-12)—. Su prueba de esta noción común discurriría como sigue: «Sea A igual a B y esta última igual a Γ. Digo que A también es igual a Γ. Dado que A, siendo igual a B, ocupa el mismo espacio que ella, y dado que B, siendo igual a Γ, ocupa el mismo espacio que ella, A también ocupa el mismo espacio que Γ. Por consiguiente, son iguales entre sí» *(Com.* 195, 1-5). Proclo señala que este argumento supone dos asunciones previas: a) las cosas que ocupan el mismo espacio, son iguales; b) dos cosas que ocupan el mismo espacio que una tercera, ocupan a su vez el mismo espacio la una que la otra; por último, hace notar que ni a) ni b) son proposiciones más claras e inmediatas que las proposiciones que tratan de establecer. Ante la desmesura de venir a demostrar lo indemostrable, K. von Fritz ha sugerido que la intención de Apolonio era más bien la de probar la transitividad de la congruencia en el caso de las líneas precisamente a partir de la noción común 1 *(vid.* su art. ya mencionado: «Die ARXAI in der griechischen Mathematik», *Archive für Begriffsgeschichte* 1 (1955), págs. 65, 100). En los modernos sistemas lógicos de identidad, la ley correspondiente a esta noción común 1 es derivable de otras leyes de la relación de identidad como la simetría y la transitividad *(vid.*, por ejemplo, el clásico A. TARSKI (1940), *Introducción a la lógica y a la metodología de las ciencias deductivas*, Madrid, 1968²; § 187, pág. 84).

[19] Heiberg atetiza las nociones comunes 4, 5, 6:

4. «Y si se añaden cosas iguales a cosas desiguales los totales son desiguales».
5. «Y los dobles de una misma cosa son iguales entre sí».
6. «Y las mitades de una misma cosa son iguales entre sí».

Proclo, observando que no se deben multiplicar los axiomas sin nece-

7. Y las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.
8. Y el todo es mayor que la parte [20].

PROPOSICIÓN 1

Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada.

Sea AB la recta finita dada.

Así pues, hay que construir sobre la recta AB un triángulo equilátero.

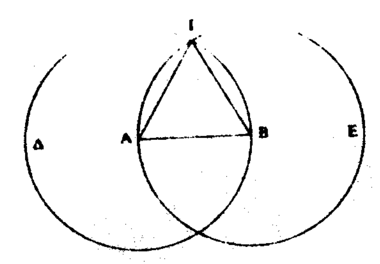
Descríbase con el centro A y la distancia AB el círculo BΓΔ [Post. 3], y con el centro B y la distancia BA descríba-

sidad, indica que deben ser rechazados todos los que se siguen de los cinco admitidos por él (las cinco nociones comunes recogidas en el texto). Por ejemplo, menciona la noción común 5 como una de las que deben ser excluidas por seguirse de la primera. Según una observación de Simplicio recogida por Al-Nayrizi, sólo había tres axiomas en los mss. más antiguos, pero se fueron añadiendo otros con posterioridad. El furor por la explicitación de supuestos y la falta de elegancia deductiva llevarán a algún comentador moderno a formular no menos de treinta axiomas euclidianos.

[20] Heiberg suprime también la noción común 9: «Dos rectas no encierran un espacio». Proclo la cita como uno de los ejemplo de multiplicación innecesaria de axiomas y señala además como objeción a éste que pertenece al ámbito específico de la geometría y no es de carácter general. El axioma es innecesario por estar incluido en el significado del postulado 1.

Seguramente se incluyó a partir del pasaje interpolado de I 4: «Y si la base BΓ no coincide con la base EH, dos rectas encerrarán un espacio, lo cual es imposible» *(vid.* nota 30). Algunos mss. incluyen esta noción común: V, b, p. E incluso otros, P y F, lo introducen después del postulado 5, proceder que sigue Campano. Stamatis lo mantiene en este lugar.

se a su vez el círculo ΑΓΕ [Post. 3], y a partir del punto Γ donde los círculos se cortan entre sí, trácense las rectas ΓΑ, ΓΒ hasta los puntos Α, Β [Post. 1].



Y puesto que el punto Α es el centro del círculo ΓΔΒ, ΑΓ es igual a ΑΒ [Def. 15]; puesto que el punto Β es a su vez el centro del círculo ΓΑΕ, ΒΓ es igual a ΒΑ [Def. 15]; pero se ha demostrado que ΓΑ es igual a ΑΒ; por tanto, cada una de las (rectas) [21] ΓΑ, ΓΒ es igual a ΑΒ. Ahora bien, las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí [N. C. 1]; por tanto, ΓΑ es también igual a ΓΒ; luego las tres ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ son iguales entre sí.

Por consiguiente, el triángulo ΑΒΓ es equilátero y ha sido construido sobre la recta finita dada ΑΒ. (Que es) lo que había que hacer [22].

---

[21] Euclides omite con frecuencia las palabras «punto» «línea» «recta» «figura», etc. En griego, por lo general, basta con el artículo para saber a qué se refiere en cada caso por ser dichas palabras de diferente género; no ocurre lo mismo en español. Por ello, en los casos en los que me parece necesaria la palabra omitida para la comprensión de texto, la pongo entre paréntesis.

[22] La prueba de esta proposición suele oficiar como paradigma de la demostración euclídea. No sólo tiene una claridad meridiana, sino que discurre por los pasos canónicos que Proclo identifica (proposición, exposición, especificación, preparación, demostración propiamente dicha, conclusión; *Com.* 203, 1-14; *vid. supra,* introducción general, II, § 2), y además procede con la informalidad característica de la geometría clásica. Esta informalidad, el uso de supuestos no declarados, le ha valido objeciones y reparos. Las objeciones se remontan a críticos antiguos, como el epicúreo Zenón de Sidón (hacia finales del siglo II y principios del siglo I a. C.), quien observó que el problema no quedaba resuelto a menos que se diera por descontado que dos líneas rectas no pueden tener un segmento común (Proclo, *Com.* 214, 18 ss.). Los reparos son de origen más moderno y se centran en la necesidad de un postulado de continuidad que asegure la existencia de un punto de intersección entre los círculos; el punto de intersección, que viene a ser uno de los vértices del triángulo —con los otros dos situados en los centros de los círculos—, aparece en esta prueba por obra y gracia de la representación diagramática del problema, pero no se halla previsto ni cubierto por las bases teóricas de su contrucción. Pues bien, el postulado de continuidad —en una versión similar a la propuesta por Dedekind (1872)— prevé que si todos los puntos de una recta se distribuyen en dos clases tales que cada punto de la primera clase está a la izquierda de todo punto de la segunda clase, existe un solo punto que produce esta división de todos los puntos en dos clases, la división de la recta en dos partes. De este postulado se desprende que si, en un plano dado, un círculo C tiene un punto P dentro, y otro punto Q fuera, de otro círculo C*, ambos círculos tendrán dos puntos de intersección. Para más referencias, *vid.* T. L. Heath, ed. cit., 1926², I, págs. 234-240, 242.

Proposición 2

Poner en un punto dado (como extremo) [23] *una recta igual a una recta dada.*

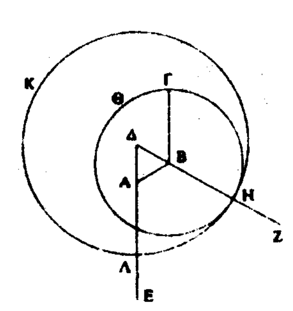
Sea Α el punto dado y ΒΓ la recta dada.

Así pues, hay que poner en el punto Α una recta igual a la recta dada ΒΓ.

---

[23] Añado «(como extremo)» porque el enunciado «poner en un punto» no queda suficientemente claro en español. En griego la preposición *pros (tò dothénti sēmeíoi)* da una idea más clara de lo que se pretende.

Trácese [24], pues, desde el punto Α hasta el punto Β la recta ΑΒ [Post. 1] y constrúyase sobre ella el triángulo equilátero ΔΑΒ [I, 1], y sean ΑΕ, ΒΖ el resultado de prolongar en línea recta las rectas ΔΑ, ΔΒ [25] [Post. 2]; y con el centro Β y la distancia ΒΓ descríbase el círculo ΓΗΘ, y a su vez con el centro Δ y la distancia ΔΗ, descríbase el círculo ΗΚΛ [Post. 3].



Así pues, como el punto Β es el centro del círculo ΓΗΘ, ΒΓ es igual a ΒΗ. Como a su vez el punto Δ es el centro del círculo ΗΚΛ, ΔΛ es igual a ΔΗ, cuyas partes respectivas ΔΑ y ΔΒ son iguales. Luego la parte restante ΑΛ es igual a la parte restante ΒΗ [N. C. 3]. Pero se ha demostrado que también ΒΓ es igual a ΒΗ; por tanto, cada una de las (rectas) ΑΛ, ΒΓ es igual a ΒΗ. Y las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí [N. C. 1]; luego ΑΛ es también igual a ΒΓ.

Por consiguiente, en el punto dado Α se ha puesto la recta ΑΛ igual a la recta dada ΒΓ Q. E. F. [26].

[24] El verbo utilizado aquí es *epedseúchthō*, que tiene el significado de «unir». Euclides lo utiliza cuando se trata de unir dos puntos trazando una recta. Para trazar líneas rectas en general utiliza el verbo *ágō*.

[25] El primer lugar donde Euclides emplea una expresión semejante a la nuestra: «prolónguese uno de sus lados ΒΓ hasta Δ», es en I, 16: *prosekbeblḗsthō autoû mía pleurà hē* ΒΓ *epì tò* Δ.

[26] A partir de aquí utilizaré la abreviatura «Q. E. F.» *(Quod erat faciendum* = Que es lo que había que hacer) para señalar la conclusión de problemas.

PROPOSICIÓN 3

Dadas dos rectas desiguales, quitar de la mayor una recta igual a la menor.

Sean ΑΒ, Γ las dos rectas desiguales dadas, sea ΑΒ la mayor de ellas.

Así pues, hay que quitar de la mayor, ΑΒ una recta igual a la menor, Γ.

Colóquese sobre el punto Α la recta ΑΔ igual a la recta Γ [I, 2] y con el centro Α y la distancia ΑΔ descríbase el círculo ΔΕΖ [Post. 3], y como el punto Α es el centro del círculo ΔΕΖ, ΑΕ es igual a ΑΔ; pero también Γ es igual a ΑΔ; luego cada una de las (rectas) ΑΕ, Γ es igual a ΑΔ; de modo que también ΑΕ es igual a Γ [N. C. 1].

Por consiguiente, dadas dos rectas desiguales: ΑΒ, Γ, se ha quitado de la mayor, ΑΒ, la recta ΑΕ igual a la menor, Γ. Q. E. F.

PROPOSICIÓN 4

Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales a dos lados del otro y tienen iguales los ángulos comprendidos por las rectas iguales [27], *tendrán también las respectivas*

[27] Euclides habla de «rectas» y no de «lados» por ceñirse a la definición de ángulo como la inclinación mutua de dos líneas.

bases iguales[28], *y un triángulo será igual al otro, y los ángulos restantes, a saber: los subtendidos por lados iguales, serán también iguales respectivamente.*

Sean ABΓ, ΔEZ, dos triángulos que tienen los dos lados AB, AΓ iguales a ΔE, ΔZ, respectivamente, es decir AB a ΔE y AΓ a ΔZ, y el ángulo BAΓ igual al ángulo EΔZ.

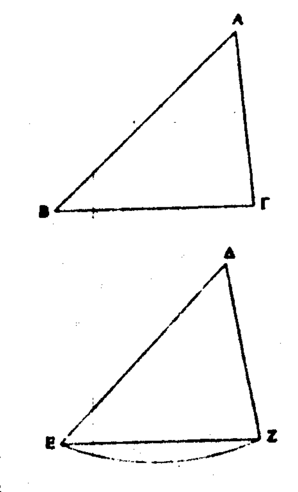
Digo que también la base BΓ es igual a la base EZ y que el triángulo ABΓ será igual al triángulo ΔEZ y los ángulos restantes, subtendidos por los lados iguales, serán también iguales respectivamente, es decir, el (ángulo)[29] ABΓ (igual) al (ángulo) ΔEZ, y el (ángulo) AΓB (igual) al (ángulo) ΔZE.

Pues si se aplica el triángulo ABΓ al triángulo ΔEZ y el punto A se coloca sobre el punto Δ y la recta AB sobre la recta ΔE, coincidirá también el punto B sobre el punto E por ser igual AB a ΔE; al coincidir también AB con ΔE, la recta AΓ coincidirá también con ΔZ por ser igual el án-

[28] Es la primera vez que utiliza la palabra *básis* (base) en los *Elementos*. Proclo explica que se refiere al lado que está al mismo nivel que la vista, o al tercer lado cuando se han mencionado ya los otros dos. No es una explicación satisfactoria, porque el término aparece también en contextos donde dicho significado no tendría sentido y se aplica también a la base de los paralelogramos. El uso del término debe provenir más bien de la práctica de trazar el lado en cuestión horizontalmente y el resto de la figura sobre él. Se hablaba de la base de una figura en el mismo sentido que de la base de cualquier otra cosa: por ej., el pedestal de una columna.

[29] Euclides emplea con frecuencia braquilogías para referirse a los ángulos. La expresión más frencuente es *hē hypò* seguido de las tres letras que definen las rectas que comprenden el ángulo: por ej., *he hypò* BAΓ. La expresión más completa sería *hē hypò tôn* BA, AΓ *periekhoménē gōnía* («el ángulo comprendido por las rectas BA, AΓ»). Otra expresión utilizada con frecuencia es *hē pròs tôi* seguido de la letra del vértice, por ej., *he pròs tô* A: «el ángulo correspondiente a A»

gulo BAΓ al EΔZ; de modo que también el punto Γ coincidirá con el punto Z por ser igual a su vez AΓ a ΔZ. Pero también el punto B había coincidido con el punto E; de modo que la base BΓ coincidirá con la base EZ ([pues si habiendo coincidido el punto B con el punto E y el punto Γ con el punto Z, no coindice la base BΓ con la base EZ, dos rectas encerrarán un espacio; lo cual es imposible. Por tanto, coincidirá la base BΓ con la base EZ])[30] y será igual a ella [N. C. 4]; de modo que también el triángulo entero ABΓ coincidirá con el triángulo entero ΔEZ y será igual a él, y los ángulos restantes coincidirán con los ángulos restantes y serán iguales a ellos, el (ángulo) ABΓ al (ángulo) ΔEZ y el (ángulo) AΓB al (ángulo) ΔZE.



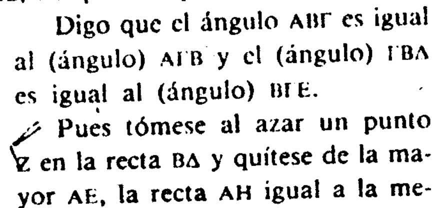
Por consiguiente, si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales a dos lados del otro y tienen iguales los ángulos comprendidos por las rectas iguales, tendrán también las respectivas bases iguales y un triángulo será igual al otro, y los ángulos restantes, a saber: los subtendidos por lados iguales, serán también iguales, respectivamente. (Que es lo que había que demostrar.)

[30] Heiberg atetiza el texto traducido entre corchetes considerándolo una interpolación temprana. El texto de Al-Nayrīzī no da las palabras en este lugar sino después de la cláusula que marca la conclusión «Q. E. D.», señal de que se trata de un escolio.

Proposición 5

En los triángulos isósceles los ángulos de la base son iguales entre sí, y prolongadas las dos rectas iguales, los ángulos situados bajo la base serán iguales entre sí.

Sea ABΓ el triángulo isósceles que tiene el lado AB igual al lado AΓ, y sean BΔ, ΓE el resultado de prolongar en línea recta las rectas AB, AΓ [Post. 2].



Digo que el ángulo ABΓ es igual al (ángulo) AΓB y el (ángulo) ΓBΔ es igual al (ángulo) BΓE.

Pues tómese al azar un punto Z en la recta BΔ y quítese de la mayor AE, la recta AH igual a la menor AZ [I, 3], y trácense las rectas ZΓ, HB. [Post. 1].

Ahora bien, como AZ es igual a AH y AB a AΓ, las dos rectas ZA, AΓ son respectivamente iguales a las dos rectas HA, AB y comprenden el ángulo común ZAH; por tanto, la base ZΓ es igual a la base HB, y el triángulo AZΓ será igual al triángulo AHB, y los ángulos restantes subtendidos por lados iguales serán también iguales respectivamente, el (ángulo) AΓZ al (ángulo) ABH y el (ángulo) AZΓ al (ángulo) AHB [I, 4]. Como la recta entera AZ es igual a la recta entera AH, cuyas respectivas partes AB y AΓ son iguales, entonces la parte restante BZ es igual a la parte restante ΓH. Pero se ha demostrado también que ZΓ es igual a HB; entonces las dos rectas BZ, ZΓ son iguales a las dos rectas ΓH, HB, respectivamente; y el ángulo BZΓ

es igual al (ángulo) ΓHB y su base común es BΓ; y el triángulo BZΓ será, por tanto, igual al triángulo ΓHB, y los ángulos restantes subtendidos por lados iguales serán también iguales respectivamente; así que es igual el ángulo ZBΓ al ángulo HΓB y el ángulo BΓZ al ángulo ΓBH. Así pues, como se ha demostrado que el ángulo entero ABH es igual al ángulo entero AΓZ cuyas partes respectivas ΓBH, BΓZ son iguales, entonces el ángulo restante ABΓ es igual al ángulo restante AΓB y están en la base del triángulo ABΓ. Pero se ha demostrado que también el ángulo ZBΓ es igual al ángulo HΓB; y son los situados debajo de la base.

Por consiguiente, en los triángulos isósceles, los ángulos que están en la base son iguales entre sí y, prolongadas las rectas iguales, los ángulos situados debajo de la base serán iguales entre sí. Q. E. D. [31].

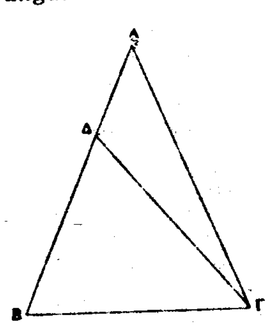
Proposición 6

Si dos ángulos de un triángulo son iguales entre sí, también los lados que subtienden a los ángulos iguales serán iguales entre sí.

[31] Proclo *(Com.* 250, 20) se hace eco de la tradición que atribuye a Tales el descubrimiento de este teorema (otros resultados conocidos desde antiguo serían I 12, 15, 23, 26, 47). Como muestra de una prueba preeuclídea de I 5, *vid.* Aristóteles, *A. Pr.* I, 24, 41b13-22, donde se hace uso del ángulo curvilíneo formado por un arco y una cuerda.

A partir de aquí emplearé la abreviatura usual «Q. E. D.» *(quod erat demonstrandum* = que es lo que había que demostrar) para señalar la conclusión de teoremas. Los griegos conocían una abreviatura similar: *oi* para la cláusula *hóper édei deîxai (deikhthênai), vid.* por ejemplo, la edic. de Arquímedes: *El Método* (Madrid, 1986), proposición 3, pág. 53, nota 12.

Sea el triángulo ABΓ que tiene el ángulo ABΓ igual al ángulo AΓB.



Digo que también el lado AB es igual al lado AΓ. Pues si AB no es igual a AΓ, uno de ellos es mayor. Sea AB el (lado) mayor. Y del (lado) mayor AB quítese la (recta) ΔB igual al (lado) menor AΓ, y trácese ΔΓ.

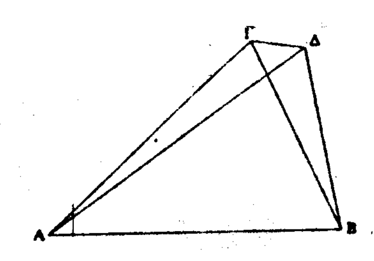
Ahora bien, como ΔB es igual a AΓ y BΓ es común, también los dos lados ΔB, BΓ son iguales a los dos lados AΓ, ΓB, respectivamente, y el ángulo ΔBΓ es igual al ángulo AΓB; por tanto, la base ΔΓ es igual a la base AB, y el triángulo ΔBΓ será igual al triángulo AΓB, el menor al mayor; lo cual es absurdo; entonces los lados AB y AΓ no son desiguales; luego son iguales.

Por consiguiente, si dos ángulos de un triángulo son iguales entre sí, también los lados que subtienden a los ángulos iguales serán iguales entre sí Q. E. D.

Proposición 7

No se podrán levantar sobre la misma recta otras dos rectas iguales respectivamente a dos rectas dadas, de modo que se encuentren en dos puntos distintos por el mismo lado y con los mismos extremos que las rectas dadas [32].

Pues, si es posible (hacerlo), constrúyanse sobre una misma recta AB, otras dos rectas AΔ, ΔB iguales respectivamente a dos rectas dadas AΓ, ΓB, que se encuentren en dos puntos diferentes Γ y Δ, por el mismo lado y que tengan los mismos extremos, de modo que ΓA sea igual a ΔA y tenga el mismo extremo que ella: A, y ΓB sea igual a ΔB y tenga el mismo extremo que ella: B, y trácese ΓΔ.



Ahora bien, puesto que AΓ es igual a AΔ, también es igual el ángulo AΓΔ al ángulo AΔΓ [I, 5], por tanto, el ángulo AΔΓ es mayor que el ángulo ΔΓB; luego el ángulo ΓΔB es mucho mayor que el ángulo ΔΓB. Puesto que ΓB es a su vez igual a ΔB, también es igual el ángulo ΓΔB al ángulo ΔΓB. Pero se ha demostrado que también es mucho mayor que él; lo cual es imposible.

Por consiguiente, no se podrán levantar sobre una misma recta otras dos rectas iguales respectivamente a dos rectas dadas de modo que se encuentren en dos puntos distintos por el mismo lado y con los mismos extremos que las rectas dadas. Q.E.D.

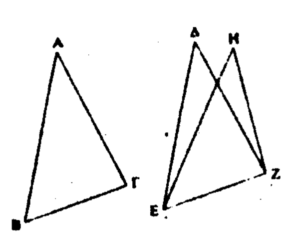
[32] *Synístasthai* es el verbo empleado comúnmente por los geómetras griegos para referirse a la construcción de un triángulo en particular. Por tanto, los griegos podían entender fácilmente la expresión *systathésontai epí* con el sentido de construir o levantar dos rectas formando un triángulo sobre otra recta. En español habría que precisar el sentido del término, de ahí mi traducción de *epì tês autês eutheías... ou systathésontai... pròs állōi kaì állōi sēmeíōi* como: «no se podrán levantar sobre la misma recta ... de modo que se encuentren en puntos distintos».

PROPOSICIÓN 8

Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales respectivamente a dos lados del otro y tienen también iguales sus bases respectivas, también tendrán iguales los ángulos comprendidos por las rectas iguales.

Sean ABΓ, ΔEZ dos triángulos que tienen los dos lados AB, AΓ iguales, respectivamente, a ΔE, ΔZ, (es decir) el lado AB al lado ΔE y el lado AΓ al lado ΔZ; y tengan también la base BΓ igual a la base EZ.

Digo que el ángulo BAΓ es también igual al ángulo EΔZ.



Pues si se aplica el triángulo ABΓ al triángulo ΔEZ y se pone el punto B sobre el punto E y la recta BΓ sobre la recta EZ, coincidirá también el punto Γ con el punto Z por ser igual BΓ a EZ; y al coincidir BΓ con EZ coincidirán también BA, ΓA con EΔ, ΔZ. Pues si coincide la base BΓ con la base EZ y los lados BA, AΓ no coinciden con los lados EΔ, ΔZ sino que se desvían como EH, HZ, podrán ser construidas sobre una misma recta otras dos rectas iguales respectivamente a dos rectas dadas que se encuentren en puntos distintos por el mismo lado y con los mismos extremos. Pero no pueden construirse [I, 7]; por tanto, no es posible que, aplicada la base BΓ a la base EZ, no coincidan los lados BA, AΓ con los lados EΔ, ΔZ. Luego coincidirán; de modo que también el ángulo BAΓ coincidirá con el ángulo EΔZ y será igual a él.

Por consiguiente, si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales respectivamente a dos lados del otro y tienen las bases respectivas iguales, también tendrán iguales los ángulos comprendidos por las rectas iguales. Q. E. D.

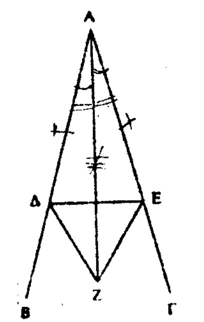
PROPOSICIÓN 9

Dividir en dos partes iguales un ángulo rectilíneo dado.

Sea BAΓ el ángulo rectilíneo dado.

Así pues, hay que dividirlo en dos partes iguales.

Tómese al azar un punto Δ en la recta AB y quítese de AΓ la recta AE igual a AΔ [I, 3] y trácese ΔE, y constrúyase sobre ΔE el triángulo equilátero ΔEZ, y trácese AZ.



Digo que el ángulo BAΓ ha sido dividido en dos partes iguales por la recta AZ.

Pues como la (recta) AΔ es igual a la (recta) AE y AZ es común, las dos (rectas) ΔA, AZ son iguales respectivamente a las dos (rectas) EA, AZ. Y la base ΔZ es igual a la base EZ; por tanto, el ángulo ΔAZ es igual al ángulo EAZ [I, 8].

Por consiguiente, el ángulo rectilíneo dado BAΓ ha sido dividido en dos partes iguales por la recta AZ. Q. E. F.

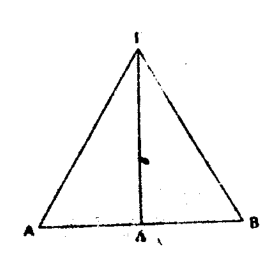
PROPOSICIÓN 10

Dividir en dos partes iguales una recta finita dada.

Sea AB la recta finita dada.

Así pues, hay que dividir en dos partes iguales la recta finita AB.

Constrúyase sobre ella el triángulo equilátero ABΓ [I, 1] y divídase en dos partes iguales el ángulo AΓB mediante la recta ΓΔ [I, 9].



Digo que la recta AB ha sido dividida en dos partes iguales en el punto Δ.

Pues como la recta AΓ es igual a la recta ΓB y la recta ΓΔ es común, entonces las dos rectas AΓ, ΓΔ son iguales respectivamente a las dos rectas BΓ, ΓΔ; y el ángulo AΓΔ es igual al ángulo BΓΔ; por tanto, la base AΔ es igual a la base BΔ [I, 4].

Por consiguiente, la recta finita dada AB ha sido dividida en dos partes iguales en el punto Δ. Q. E. F.

Proposición 11

Trazar una línea recta que forme ángulos rectos [33] *con una recta dada, desde un punto dado en ella.*

Sea AB la recta dada y sea Γ el punto dado en ella.

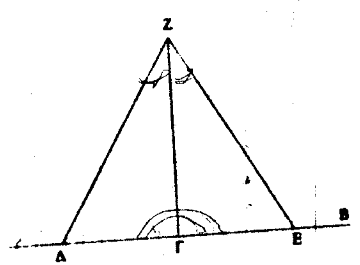
Así pues, hay que trazar una línea recta que forme ángulos rectos con la recta AB desde el punto Γ.

Tómese un punto Δ al azar sobre la recta AΓ, y hágase [34] ΓE igual a ΓΔ [I, 3], y constrúyase sobre ΔE el triángulo equilátero ZΔE [I, 1], y trácese ZΓ.

[33] Traduzco *pròs orthàs gonías* como «que forme ángulos rectos» para distinguirlo de *káthetos*, «perpendicular».

[34] La forma verbal *keístho* de *keîmai*, verbo que se utiliza para la voz pasiva de *títhemi*, «poner», «colocar», se emplea en este contexto en el sentido de «hacer una línea igual a otra».

Digo que ha sido trazada la línea recta ZΓ que forma ángulos rectos con la recta dada AB, desde el punto Γ dado en ella.



Pues como ΔΓ es igual a ΓE, y ΓZ es común, los dos (lados) ΔΓ, ΓZ son iguales respectivamente a los dos (lados) EΓ, ΓZ; y la base ΔZ es igual a la base ZE; por tanto, el ángulo ΔΓZ es igual al ángulo EΓZ [I, 8]; y son ángulos adyacentes. Y cuando una recta levantada sobre otra recta hace los ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos iguales es recto [Def. 10], por tanto cada uno de los ángulos ΔΓZ y ZΓE es recto.

Por consiguiente, ha sido trazada la línea recta ΓZ que forma ángulos rectos con la recta dada AB, desde el punto Γ dado en ella. Q. E. F.

Proposición 12

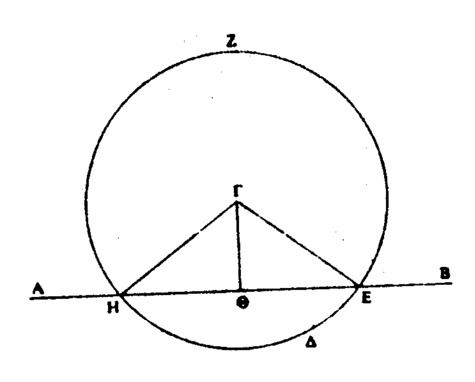
Trazar una línea recta perpendicular a una recta infinita [35] *dada desde un punto dado que no esté en ella.*

[35] *Ápeiron.* La precisión «indefinida» que presentan otras versiones españolas (e. g., J. D. García Bacca, ed. cit., 1944, pág. 37; F. Vera, ed. cit., 1970, pág. 712) no parece necesaria en este contexto.

Sea AB la recta infinita dada y Γ el punto dado que no está en ella.

Así pues, hay que trazar una línea recta perpendicular a la recta infinita dada AB desde el punto dado Γ que no está en ella.

Tómese, pues, al azar un punto Δ al otro lado de la recta AB, y con el centro Γ y la distancia ΓΔ descríbase el círculo EZH [Post. 3], y divídase en dos partes iguales la recta EH en Θ, y trácense las rectas ΓH, ΓΘ, ΓE [Post. 1].



Digo que ha sido trazada la recta ΓΘ perpendicular a la recta infinita dada AB desde el punto dado Γ que no está en ella.

Pues como HΘ es igual a ΘE y ΘΓ es común, los dos (lados) HΘ, ΘΓ son iguales respectivamente a los dos (lados) EΘ, ΘΓ; y la base ΓH es igual a la base ΓE; por tanto, el ángulo ΓΘH es igual al ángulo EΘΓ [I, 8]. Y son adyacentes. Ahora bien, cuando una recta levantada sobre otra recta hace los ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos iguales es recto, y la recta que se ha levantado se llama perpendicular a aquella sobre la que está (Def. 10).

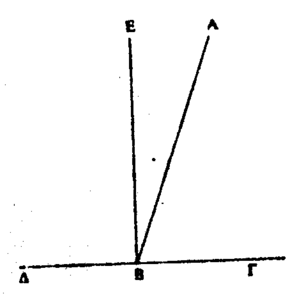
Por consiguiente, se ha trazado la recta ΓΘ perpendicular a la recta infinita dada AB, desde el punto dado Γ que no está en ella. Q. E. F.

Proposición 13

Si una recta levantada sobre otra recta forma ángulos, o bien formará dos rectos o bien (ángulos) iguales a dos rectos.

Así pues, forme una recta cualquiera AB levantada sobre la recta ΓΔ los ángulos ΓBA, ABΔ.

Digo que los ángulos ΓBA, ABΔ son o bien dos rectos o iguales a dos rectos.



En efecto, si ΓBA es igual a ABΔ, son dos rectos [Def. 10]. Pero si no, trácese desde el punto B la recta BE que forme ángulos rectos con ΓΔ [I, 11]; entonces los ángulos ΓBE, EBΔ son dos rectos; y dado que el (ángulo) ΓBE es igual a los dos (ángulos) ΓBA, ABE, añádase al uno y a los otros [36] el ángulo EBΔ; entonces los (ángulos) ΓBE, EBΔ

[36] *Koinè proskeísthō hē hypò* EBΔ, literalmente: «añádase el ángulo EBΔ común». Del mismo modo se utiliza *koinè apheréstho* para quitar

son iguales a los tres (ángulos) ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΑ [N. C. 2]. Como el (ángulo) ΔΒΑ es igual a su vez a los dos (ángulos) ΑΒΓ, ΓΒΑ añádase al uno y a los otros el (ángulo) ΑΒΓ; entonces los (ángulos) ΑΒΑ, ΑΒΓ son iguales a los tres (ángulos) ΑΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ [N. C. 2]. Pero se ha demostrado que también los (ángulos) ΓΒΕ, ΕΒΑ son iguales a esos mismos tres; ahora bien, las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí [N. C. 1]; por tanto, los (ángulos) ΓΒΕ, ΕΒΑ son también iguales a los (ángulos) ΑΒΑ, ΑΒΓ. Pero los (ángulos) ΓΒΕ, ΕΒΑ son dos rectos; por tanto, los (ángulos) ΔΒΑ, ΑΒΓ son también iguales a dos rectos.

Por consiguiente, si una recta levantada sobre otra recta forma ángulos, formará o bien dos rectos o bien (ángulos) iguales a dos rectos. Q. E. D.

Proposición 14

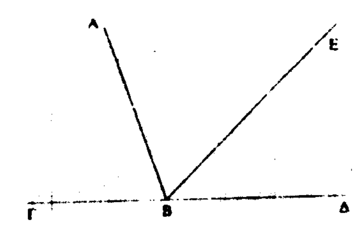
Si dos rectas forman con una recta cualquiera y en un punto de ella ángulos adyacentes iguales a dos rectos y no están en el mismo lado (de ella), ambas rectas estarán en línea recta.

Así pues, sean dos rectas ΒΓ, ΒΔ que, con una recta cualquiera ΑΒ y en un punto de ella Β y sin estar colocadas en el mismo lado (de la recta ΑΒ), formen dos ángulos adyacentes ΑΒΓ, ΑΒΔ iguales a dos rectos.

Digo que ΒΔ está en línea recta con ΓΒ.

un ángulo o una línea recta de otros. En español, la expresión «añadir el ángulo común» resultaría ambigua, por ello traduzco *koiné* por «a uno y a los otros», o «a ambos», cuando se trata de dos.

Pues si ΒΔ no está en línea recta con ΒΓ, esté ΒΕ en línea recta con ΓΒ.



Así pues, dado que la recta ΑΒ ha sido levantada sobre la recta ΓΒΕ, entonces los ángulos ΑΒΓ, ΑΒΕ son iguales a dos rectos [I, 13]; pero también los (ángulos) ΑΒΓ, ΑΒΔ son iguales a dos rectos; por tanto los (ángulos) ΓΒΑ, ΑΒΕ son iguales a los (ángulos) ΓΒΑ, ΑΒΔ [Post. 4 y N. C. 1]. Quítese de ambos el (ángulo) común ΓΒΑ; luego el ángulo restante ΑΒΕ es igual al ángulo restante ΑΒΔ [N. C. 3], el menor al mayor; lo cual es imposible. Por tanto, ΒΕ no está en línea recta con ΓΒ. Y de modo semejante demostraríamos esto de cualquier otra que no sea la recta ΒΔ. Por tanto, ΓΒ está en línea recta con ΒΔ.

Por consiguiente, si dos rectas forman con una recta cualquiera y en un punto de ella ángulos adyacentes iguales a dos rectos y no están en el mismo lado (de ella), ambas rectas están en línea recta. Q. E. D.

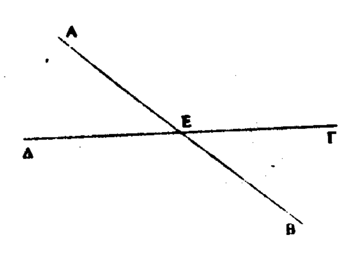
Proposición 15

Si dos rectas se cortan, hacen los ángulos del vértice [37] *iguales entre sí.*

[37] *Hai katà koryphèn gōniai.* Se refiere a los ángulos opuestos por el vértice.

Así pues, córtense las dos rectas ΑΒ, ΓΔ en el punto Ε.

Digo que el ángulo ΑΕΓ es igual al (ángulo) ΔΕΒ y el (ángulo) ΓΕΒ al (ángulo) ΑΕΔ.



Pues, dado que la recta ΑΕ ha sido levantada sobre la recta ΓΔ formando los ángulos ΓΕΑ, ΑΕΔ, entonces los ángulos ΓΕΑ, ΑΕΔ son iguales a dos rectos [I, 13]. Dado que la recta ΔΕ ha sido levantada a su vez sobre la recta ΑΒ formando los ángulos ΑΕΔ, ΔΕΒ, entonces los ángulos ΑΕΔ, ΔΕΒ son iguales a dos rectos. Pero se ha demostrado que los (ángulos) ΓΕΑ, ΑΕΔ son iguales a dos rectos; luego los (ángulos) ΓΕΑ, ΑΕΔ son iguales a los (ángulos) ΑΕΔ, ΔΕΒ [Post. 4 y N. C. 1]. Quítese de ambos ΑΕΔ; entonces, el (ángulo) restante ΓΕΑ es igual al (ángulo) restante ΒΕΔ [N. C. 3]; de manera semejante demostraríamos [38] que también los (ángulos) ΓΕΒ, ΔΕΑ son iguales.

Por consiguiente, si dos rectas se cortan, hacen los ángulos del vértice iguales entre sí. Q. E. D. [39].

[38] En griego aparece el futuro *deixomen*, «demostraremos». Considero más adecuado el condicional en español porque, en este contexto, esa expresión no representa un compromiso real con una demostración futura, sino la indicación de otras posibles aplicaciones del mismo procedimiento.

[39] Aunque no está en los mss. más acreditados, Proclo y Pselo reconocen el siguiente porisma:

Proposición 16

En todo triángulo, si se prolonga uno de sus lados, el ángulo externo es mayor que cada uno de los ángulos internos y opuestos.

Sea ΑΒΓ el triángulo y prolónguese uno de sus lados, ΒΓ, hasta Δ.

Digo que el ángulo externo ΑΓΔ es mayor que cada uno de los ángulos internos y opuestos, ΓΒΑ y ΒΑΓ.

Córtese en dos partes iguales ΑΓ por el punto Ε y, trazada ΒΕ prolónguese en línea recta hasta Ζ y hágase ΕΖ igual a ΒΕ [I, 3], y trácese ΖΓ [Post. 1], y prolónguese por el otro lado [40] ΑΓ hasta Η [Post. 2].

Así pues, como ΑΕ es igual a ΕΓ, y ΒΕ a ΕΖ, los dos (lados) ΑΕ, ΕΒ son iguales respectivamente a los dos (lados) ΓΕ, ΕΖ; y el ángulo ΑΕΒ es igual al ángulo ΖΕΓ; pues son opuestos por el vértice; entonces, la base ΑΒ es igual a la base ΖΓ y el triángulo ΑΒΕ es igual

[Porisma: A partir de esto queda claro que si dos rectas se cortan hacen los ángulos de la intersección iguales a cuatro rectos.]

Las proposiciones de este género no tienen en los *Elementos* el carácter que al parecer presentaban en un tratado perdido de Euclides titulado precisamente *Porismata*. Si allí eran una especie de proposiciones intermedias entre teoremas y problemas, aquí representan lo que hoy conocemos como corolarios.

[40] En esta ocasión, Euclides utiliza el verbo *diágomai (diékhthō)* en lugar de *ekbeblésthō*, que es el empleado habitualmente para «prolongar». La traducción literal de *diágein* sería «trazar a través de», «trazar pasando por un punto».

al triángulo ZEΓ, y los ángulos restantes, a saber: los subtendidos por lados iguales son respectivamente iguales [I, 4], entonces es igual el (ángulo) BAE al (ángulo) EΓZ. Pero el (ángulo) EΓΔ es mayor que el ángulo EΓZ [N. C. 5]; luego el ángulo AΓΔ es mayor que el ángulo BAE. Así pues, de manera semejante, si se divide en dos la recta BΓ, se demostrará que también el ángulo BΓH, es decir el ángulo AΓΔ [I, 15] es mayor que él ángulo ABΓ.

Por consiguiente, en todo triángulo, si se prolonga uno de sus lados, el ángulo externo es mayor que cada uno de los ángulos internos y opuestos. Q. E. D. [41].

PROPOSICIÓN 17

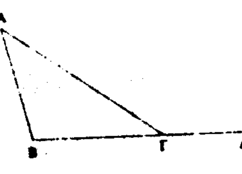
En todo triángulo dos ángulos tomados juntos de cualquier manera [42] *son menores que dos rectos.*

Sea ABΓ el triángulo.

[41] Heath observa, ed. cit., I, pág. 280, que esta proposición no tiene vigencia universal a la luz de la hipótesis de Riemann de un espacio que se extienda sin límite pero no sea infinito. Puede verse ahí el anuncio de una relación entre I 16 y la teoría euclídea de las paralelas —aparte de la relación con otros supuestos característicos, e. g., el de que dos rectas no encierran un espacio—. Esa relación se confirmará más adelante cuando la prueba de I 27, que sienta una de las condiciones de paralelismo, recurra implícitamente a esta proposición I 16. Pero si esta proposición se toma por una exclusión temprana de la posibilidad de una geometría riemanniana, I 16 vendrá a incurrir en una suerte de paralogismo, *vid.* A. Dou: «Los paralogismos de Euclides y Saccheri en la teoría de las paralelas», *Revista de la Real Academia de Ciencias* 61 (1967), 155-174.

[42] *Pántei metalambanómenai.*

Digo que dos ángulos del triángulo ABΓ tomados juntos de cualquier manera son menores que dos rectos.



Prolónguese BΓ hasta Δ [Post. 2]. Y puesto que el ángulo AΓΔ es un ángulo externo del triángulo ABΓ, es mayor que el interno y opuesto ABΓ [I, 16]. Añádase a ambos AΓB; entonces los (ángulos) AΓΔ, AΓB son mayores que los (ángulos) ABΓ, BΓA. Pero los (ángulos) AΓΔ, AΓB son iguales a dos rectos [I, 13]; por tanto, los (ángulos) ABΓ, BΓA son menores que dos rectos. Y de manera semejante demostraríamos que también los (ángulos) BAΓ, AΓB son menores que dos rectos así como los ángulos ΓAB, ABΓ.

Por consiguiente, en todo triángulo dos ángulos tomados juntos de cualquier manera son menores que dos rectos. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 18

En todo triángulo el lado mayor subtiende al ángulo mayor [43].

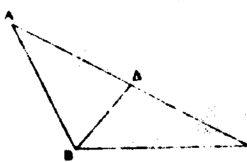
[43] Los enunciados de las proposiciones 18 y 19 son:

18. *Pantòs trigṓnou hē meídsōn pleurà tḕn meídsona gōnían hypoteínei.*

19. *Pantòs trigṓnou hypò tḕn meídsona gōnían he meídsōn pleurà hypoteínei.*

Sólo se diferencian en el orden de palabras y en la repetición de la preposición *hypó* con el régimen de *hypoteínei* en la segunda. La diferencia en el orden de formulación se debería a que en la proposición 18, el dato de partida es el lado del triángulo, mientras que en la 19 es el ángulo.

Sea, pues, ΑΒΓ el triángulo que tiene el lado ΑΓ mayor que ΑΒ.



Digo que el ángulo ΑΒΓ es también mayor que el ángulo ΒΓΑ.

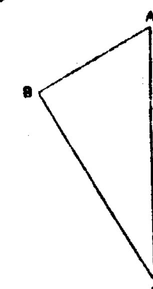
Pues como ΑΓ es mayor que ΑΒ, hágase ΑΔ igual a ΑΒ [I, 3], y trácese ΒΔ.

Y puesto que ΑΔΒ es un ángulo externo del triángulo ΒΓΔ, es mayor que el interno y opuesto ΔΓΒ [I, 16]; pero el (ángulo) ΑΔΒ es igual al (ángulo) ΑΒΔ, puesto que el lado ΑΒ es también igual a ΑΔ; por tanto, el (ángulo) ΑΒΔ también es mayor que el (ángulo) ΑΓΒ; luego el (ángulo) ΑΒΓ es mucho mayor que ΑΓΒ.

Por consiguiente, en todo triángulo el lado mayor subtiende al ángulo mayor. Q. E. D.

Proposición 19

En todo triángulo al ángulo mayor lo subtiende el lado mayor [43bis].



Sea ΑΒΓ el triángulo que tiene el ángulo ΑΒΓ mayor que el ángulo ΒΓΑ.

Digo que al lado ΑΓ es también mayor que el lado ΑΒ.

Porque si no, o bien ΑΓ es igual a ΑΒ o menor; ahora bien, ΑΓ no es igual a ΑΒ; pues entonces sería también igual el ángulo ΑΒΓ al (ángulo) ΑΓΒ [I, 5], pero no lo es; por tanto, ΑΓ no es igual a ΑΒ. Ni tampoco ΑΓ es menor que ΑΒ; pues entonces sería menor el ángulo ΑΒΓ que el (ángulo) ΑΓΒ [I, 18]; pero no lo es; por tanto, ΑΓ no es menor que ΑΒ. Pero se ha demostrado que tampoco es igual. Por tanto, ΑΓ es mayor que ΑΒ.

[43bis] Cf. nota 43.

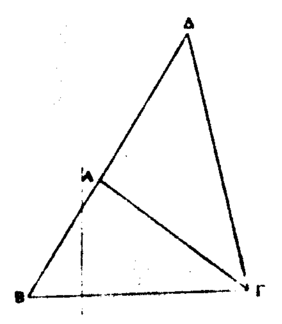
Por consiguiente, en todo triángulo al ángulo mayor lo subtiende el lado mayor. Q. E. D.

Proposición 20

En todo triángulo dos lados tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante

Sea, pues, ΑΒΓ el triángulo.

Digo que dos lados del triángulo ΑΒΓ tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante, los lados ΒΑ, ΑΓ (mayores) que ΒΓ, los lados ΑΒ, ΒΓ (mayores) que ΑΓ, y los lados ΒΓ, ΓΑ (mayores) que ΑΒ.



Prolónguese por el otro lado ΒΑ hasta el punto Δ, y hágase ΑΔ igual a ΓΑ y trácese ΔΓ.

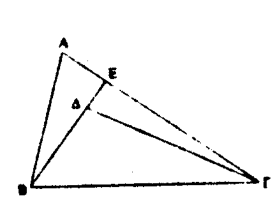
Entonces como ΔΑ es igual a ΑΓ, también el ángulo ΑΔΓ es igual al (ángulo) ΑΓΔ [I, 5]; por tanto, el (ángulo) ΒΓΔ es mayor que el (ángulo) ΑΔΓ [N. C. 5]; y puesto que ΔΓΒ es un triángulo que tiene el ángulo ΒΓΔ mayor que el ángulo ΒΔΓ, y al ángulo mayor lo subtiende el lado mayor [I, 19], entonces ΔΒ es mayor que ΒΓ. Pero ΔΑ es igual que ΑΓ; por tanto, los (lados) ΒΑ, ΑΓ son mayores que ΒΓ; de manera semejante demostraríamos que los (lados) ΑΒ, ΒΓ son también mayores que ΓΑ y los (lados) ΒΓ, ΓΑ (mayores) que ΑΒ.

Por consiguiente, en todo triángulo dos lados tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante. Q. E. D. [44].

PROPOSICIÓN 21

Si a partir de los extremos de uno de los lados de un triángulo se construyen dos rectas que se encuentren [45] en el interior (de él), las (rectas) construidas serán menores que los dos lados restantes del triángulo, pero comprenderán un ángulo mayor.

Sobre ΒΓ, uno de los lados del triángulo ΑΒΓ, a partir de los extremos Β, Γ constrúyanse dos rectas ΒΔ, ΔΓ que se encuentren en el interior de él.



Digo que ΒΔ, ΔΓ son menores que los dos lados restantes del triángulo ΒΑ, ΑΓ, pero comprenden el ángulo ΒΔΓ mayor que el (ángulo) ΒΑΓ.

Prolónguese ΒΔ hasta Ε. Y puesto que en todo triángulo dos lados son mayores que el restante [I, 20], entonces los dos lados,

[44] Proclo dice que los epicúreos acostumbraban a ridiculizar este teorema porque «era evidente incluso para un asno y no requería prueba». Su afirmación de que el teorema era comprensible *(gnórimon)* incluso para un asno, se basaba en el hecho de que, si se colocaba forraje en un vértice y el asno en el otro, el hambriento animal no iría en busca de su pitanza a través de dos lados del triángulo, sino sencillamente a través de aquel que le separaba de la comida (argumento que hizo exclamar a Savile que sus autores eran *digni ipsi, qui cum asino foenum essent:* «dignos de compartir el heno con el asno»). Proclo replica que la mera percepción de la verdad de un teorema es algo diferente de una prueba científica del mismo y del conocimiento de la razón por la cual es verdad. Por otra parte, recuerda Simson a este respecto, no debe multiplicarse el número de axiomas sin necesidad.

[45] El verbo empleado es *systathôsin (synístamai)*. Ver nota 32.

ΑΒ, ΑΕ del triángulo ΑΒΕ son mayores que ΒΕ; añádase a uno y a los otros el (lado) ΕΓ, entonces ΒΑ, ΑΓ son mayores que ΒΕ, ΕΓ. Asimismo, puesto que los lados ΓΕ, ΕΔ del triángulo ΓΕΔ son mayores que ΓΔ, añádase a uno y a los otros el (lado) ΔΒ; entonces ΓΕ, ΕΒ son mayores que ΓΔ, ΔΒ. Pero se ha demostrado que ΒΑ, ΑΓ son mayores que ΒΕ, ΕΓ; entonces ΒΑ, ΑΓ son mucho mayores que ΒΔ, ΔΓ.

Asimismo, como en todo triángulo, el ángulo externo es mayor que el interno y opuesto [I, 16]; entonces en el triángulo ΓΔΕ el ángulo externo ΒΔΓ es mayor que el ángulo ΓΕΔ. Por la misma razón, también en el triángulo ΑΒΕ el ángulo externo ΓΕΒ es mayor que el (ángulo) ΒΑΓ. Pero se ha demostrado que el ángulo ΒΔΓ es mayor que el ángulo ΓΕΒ; luego el (ángulo) ΒΔΓ es mucho mayor que el ángulo ΒΑΓ.

Por consiguiente, si a partir de los extremos de uno de los lados de un triángulo se construyen dos rectas que se encuentren en el interior (de él), las (rectas) construidas son menores que los dos lados restantes del triángulo, pero comprenden un ángulo mayor. Q. E. D.

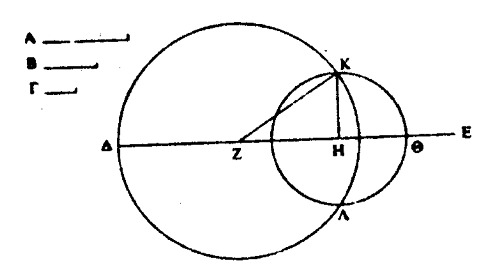
PROPOSICIÓN 22

Construir un triángulo con tres rectas que son iguales a tres rectas dadas. Pero es necesario que dos (de las) rectas tomadas juntas de cualquier manera sean mayores que la restante [46].

[46] Éste es el primer caso de *diorismós* en el contexto de un problema que aparece en los *Elementos*. En este contexto tiene el sentido de condi-

Sean A, B, Γ, las tres rectas dadas, y dos de éstas, tomadas de cualquier manera, sean mayores que la restante: A, B (mayores) que Γ; A, Γ (mayores) que B; y además B, Γ (mayores) que A.

Así pues, hay que construir un triángulo con (rectas) iguales a A, B, Γ.



Póngase una recta ΔE, limitada por Δ e ilimitada en la dirección de E, y hágase ΔZ igual a A, y ZH igual a B y HΘ igual a Γ [I, 3]; y con el centro Z y la distancia ZΔ descríbase el círculo ΔKΛ; asimismo, con el centro H y la distancia HΘ descríbase el círculo KΛΘ, y trácense KZ, KH.

Digo que se ha construido el triángulo KZH con tres rectas iguales a A, B, Γ.

Pues como el punto Z es el centro del círculo ΔKΛ, ZΔ es igual a ZK; pero ZΔ es igual a A, entonces KZ es igual a A. Y como el punto H es el centro del círculo ΛKΘ, HΘ es igual a HK; pero HΘ es igual a Γ; entonces KH es también igual a Γ. Pero también ZH es igual a B; luego las tres rectas KZ, ZH, HK, son iguales a las tres rectas A, B, Γ.

Por consiguiente, se ha construido el triángulo KZH con las tres rectas KZ, ZH, HK que son iguales a las tres rectas dadas A, B, Γ. Q. E. F.

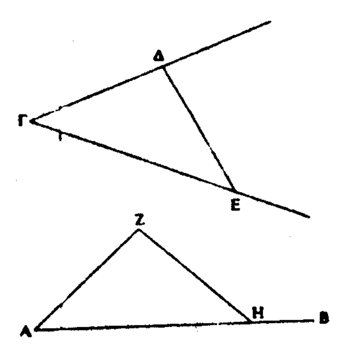
---

ción o restricción que determina la posibilidad de solución del problema. En los mss. y en algunos comentarios sigue al *diorismós* la explicación: «Porque, en todo triángulo, dos lados tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante». Pero esta explicación tiene todos los visos de una glosa. De hecho, Proclo, y Campano la omiten, y Heiberg y Stamatis la consideran una interpolación.

Proposición 23

Construir un ángulo rectilíneo igual a un ángulo rectilíneo dado, sobre una recta dada y en uno de sus puntos.

Sea AB la recta dada, A uno de sus puntos y ΔΓE el ángulo rectilíneo dado.



Así pues, hay que construir un ángulo rectilíneo igual al ángulo dado ΔΓE sobre la recta dada AB y en su punto A.

Tómense al azar los puntos Δ, E en las rectas ΓΔ, ΓE, respectivamente, y trácese ΔE. Y con tres rectas que son iguales a las tres rectas ΓΔ, ΔE, ΓE, constrúyase el triángulo AZH, de modo que ΓΔ sea igual a AZ, ΓE a AH, y además ΔE a ZH [I, 22].

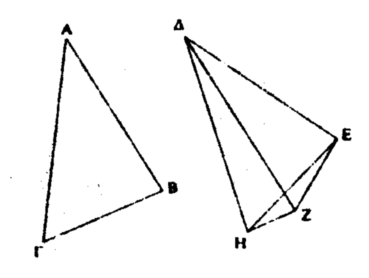
Pues bien, dado que las dos (rectas) AΓ, ΓE son iguales a las dos (rectas) ZA, AH, respectivamente, y la base ΔE es igual a la base ZH, entonces el ángulo ΔΓE es igual al ángulo ZAH [I, 8].

Por consiguiente, ha sido construido el ángulo rectilíneo ZAH igual al ángulo rectilíneo dado ΔΓE en la recta dada AB y en su punto A. Q. E. F.

Proposición 24

Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales respectivamente a dos lados del otro, pero uno tiene el ángulo comprendido por las rectas iguales mayor que el otro, también tendrá la base mayor que la otra.

Sean ABΓ, ΔEZ dos triángulos que tienen los dos lados AB, AΓ, iguales a los dos lados ΔE, ΔZ, respectivamente: AB a ΔE y AΓ a ΔZ, pero el ángulo correspondiente a A sea mayor que el ángulo correspondiente a Δ.



Digo que la base BΓ también es mayor que la base EZ.

Pues como el ángulo BAΓ es mayor que el ángulo EΔZ, constrúyase en la recta ΔE y en su punto Δ el (ángulo) EΔH igual al ángulo BAΓ [I, 23], y hágase ΔH igual a una de las dos rectas AΓ, ΔZ, y trácense EH, ZH.

Pues bien, como AB es igual a ΔE, y AΓ a ΔH, las dos (rectas) BA, AΓ son iguales respectivamente a las dos (rectas) EΔ, ΔH; y el ángulo BAΓ es igual al ángulo EΔH; por tanto, la base BΓ es igual a la base EH [I, 4]. Asimismo, como ΔZ es igual a ΔH, el ángulo ΔHZ es también igual al ángulo ΔZH [I, 5]; por tanto, el (ángulo) ΔZH es mayor que el (ángulo) EHZ; entonces el (ángulo) EZH es mucho mayor que el ángulo EHZ. Y dado que EZH es un triángulo que tiene el ángulo EZH mayor que el (ángulo) EHZ y al ángulo mayor lo subtiende el lado mayor [I, 19], entonces el lado EH es también mayor que el lado EZ. Pero EH es igual a BΓ; por tanto, BΓ es mayor que EZ.

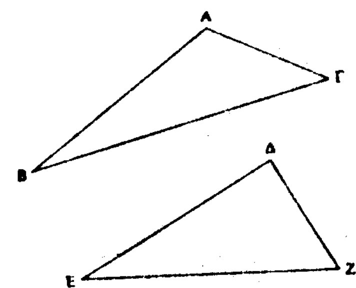
Por consiguiente, si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales respectivamente a dos lados del otro, pero tienen uno de los ángulos comprendidos por las rectas iguales mayor que el otro, también tendrán la base mayor que la otra. Q. E. D.

Proposición 25

Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales respectivamente a dos lados del otro, pero tienen la base (del uno) mayor que la base (del otro), también tendrán el ángulo comprendido por las rectas iguales (del uno) mayor que el del otro.

Sean ABΓ, ΔEZ dos triángulos que tienen los dos lados AB, AΓ iguales a los dos lados ΔE, ΔZ, respectivamente: AB a ΔE y AΓ a ΔZ; pero sea la base BΓ mayor que la base EZ.

Digo que el ángulo BAΓ también es mayor que el ángulo EΔZ.



Pues si no, o bien es igual a él o bien menor; ahora bien, el (ángulo) BAΓ no es igual al (ángulo) EΔZ; pues la base BΓ también sería igual a la base EZ [I, 4]; pero no lo es. Por tanto, el ángulo BAΓ no es igual al (ángulo) EΔZ; pero el (ángulo) BAΓ tampoco es menor que el (ángulo) EΔZ; pues la base BΓ también sería menor que la base EZ [I, 24]; pero no lo es; por tanto, el ángulo BAΓ tampoco es menor que el (ángulo) EΔZ. Pero se ha demostrado que tampoco es igual; luego el (ángulo) BAΓ es mayor que el (ángulo) EΔZ.

Por consiguiente, si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales, respectivamente, a dos lados del otro, pero tienen la base (del uno) mayor que la base (del otro), también tendrán el ángulo comprendido por las rectas iguales (del uno) mayor que el del otro. Q. E. D.

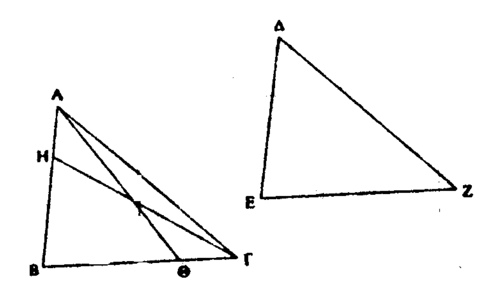
Proposición 26

Si dos triángulos tienen dos ángulos del uno iguales respectivamente a dos ángulos del otro y un lado del uno igual a un lado del otro: ya sea el correspondiente a los ángulos iguales o el que subtiende uno de los ángulos iguales, tendrán también los lados restantes iguales a los lados restantes y el ángulo restante (igual) al ángulo restante.

Sean ABΓ, ΔEZ dos triángulos que tienen los dos ángulos ABΓ, ΓBA iguales respectivamente a los dos ángulos ΔEZ, EZΔ: ABΓ igual a ΔEZ y BΓA igual a EZΔ; y tengan también un lado igual a un lado, en primer lugar el correspondiente a los ángulos iguales: BΓ igual a EZ.

Digo que también tendrán los lados restantes iguales respectivamente a los lados restantes: AB a ΔE y AΓ a ΔZ y el ángulo restante al ángulo restante: BAΓ a EΔZ.

Pues si AB no es igual a ΔE, uno de ellos es mayor. Sea el mayor AB, y hágase BH igual a ΔE, y trácese HΓ.



Así pues, como BH es igual a ΔE, y BΓ a EZ, los dos lados BH, BΓ son iguales respectivamente a los dos lados ΔE, EZ; y el ángulo HBΓ es igual al ángulo ΔEZ; por tanto, la base HΓ es igual a la base ΔZ, y el triángulo HBΓ es igual al triángulo ΔEZ, y los ángulos restantes, subtendidos por los lados iguales, serán también iguales [I, 4]; por tanto, el ángulo HΓB es igual al ángulo ΔZE. Pero se ha supuesto que el ángulo ΔZE es igual al ángulo BΓA; por tanto, el ángulo BΓH es también igual al ángulo BΓA, el menor al mayor; lo cual es imposible. Por tanto, AB no

es desigual a ΑΕ. Luego es igual. Pero también ΒΓ es igual a ΕΖ; entonces, los dos (lados) ΑΒ, ΒΓ son iguales respectivamente a los dos (lados) ΔΕ, ΕΖ; y el ángulo ΑΒΓ es igual al ángulo ΔΕΖ; por tanto, la base ΑΓ es igual a la base ΔΖ, y el ángulo restante ΒΑΓ es igual al ángulo restante ΕΔΖ [I, 4].

Pero sean iguales a su vez los lados que subtienden a los ángulos iguales, como ΑΒ a ΔΕ.

Digo, asimismo, que los lados restantes también serán iguales a los lados restantes: ΑΓ a ΔΖ y ΒΓ a ΕΖ y además el ángulo restante ΒΑΓ es igual al ángulo restante ΕΔΖ.

Pues si ΒΓ no es igual a ΕΖ, uno de ellos es mayor. Sea el mayor, si es posible, ΒΓ y hágase ΒΘ igual a ΕΖ, y trácese ΑΘ. Y puesto que ΒΘ es igual a ΕΖ y ΑΒ a ΔΕ, los dos lados ΑΒ, ΒΘ son iguales respectivamente a los dos (lados) ΔΕ, ΕΖ; y comprenden ángulos iguales; por tanto, la base ΑΘ es igual a la base ΔΖ y el triángulo ΑΒΘ es igual al triángulo ΔΕΖ, y los ángulos restantes, subtendidos por los lados iguales serán también iguales [I, 4]; por tanto, el ángulo ΒΘΑ es igual al (ángulo) ΕΖΔ. Pero el (ángulo) ΕΖΔ es igual al (ángulo) ΒΓΑ. Entonces el ángulo externo ΒΘΑ del triángulo ΑΘΓ es igual al (ángulo) interno y opuesto ΒΓΑ; lo cual es imposible; por tanto, ΒΓ no es desigual a ΕΖ; luego es igual. Pero también ΑΒ es igual a ΔΕ. Entonces los dos lados ΑΒ, ΒΓ son iguales respectivamente a los dos lados ΔΕ, ΕΖ; y comprenden ángulos iguales; por tanto, la base ΑΓ es igual a la base ΔΖ, y el triángulo ΑΒΓ es igual al triángulo ΔΕΖ, y el ángulo restante ΒΑΓ es igual al ángulo restante ΕΔΖ [I, 4].

Por consiguiente, si dos triángulos tienen dos ángulos del uno iguales respectivamente a dos ángulos del otro y un lado del uno igual a un lado del otro: ya sea el correspondiente a los ángulos iguales o el que subtiende uno de

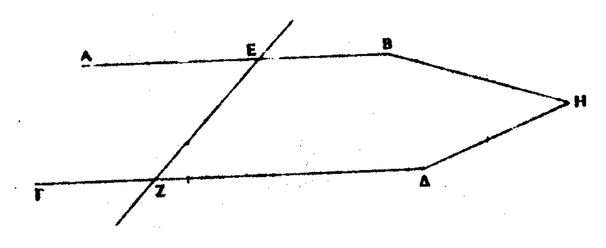
los ángulos iguales, tendrán también los lados restantes iguales a los lados restantes y el ángulo restante (igual) al ángulo restante. Q. E. D.

Proposición 27

Si una recta al incidir sobre dos rectas[47] *hace los ángulos alternos*[48] *iguales entre sí, las dos rectas serán paralelas entre sí.*

Así pues, al incidir sobre las dos rectas ΑΒ, ΓΔ, haga la recta ΕΖ los ángulos alternos ΑΕΖ, ΕΖΔ iguales entre sí.

Digo que ΑΒ es paralela a ΓΔ.



[47] *Eis dúo eutheias eutheîa empíptousa.* Se trata de la misma expresión utilizada en el postulado 5 para referirse a una transversal.

[48] La expresión utilizada para los ángulos alternos es *hai enallàx gō-niai*. Según Proclo, Euclides emplea *enalláx* («alternativamente») en dos contextos:

1. En el de cierta transformación de una proporción en el libro V y en los libros sobre aritmética.

2. Como aquí, en el caso de una recta que corta paralelas formando ángulos con ellas. *Hai enallàx gōniai* son los ángulos internos que, quedando en lados distintos de la transversal, no son adyacentes. Seguramente, el uso de *enalláx* responde a que si se imaginan los ángulos internos contados en círculo, los alternos serían cualesquiera de los cuatro no sucesivos sino separados por otro de ellos.

Pues si no, prolongadas AB, ΓΔ, se encontrarán o bien en el sentido de B, Δ, o bien en el sentido de A, Γ. Prolónguense y encuéntrense en el sentido de B, Δ en H. Entonces el ángulo externo AEZ del triángulo HEZ es igual al ángulo interno y opuesto EZH; lo cual es imposible [I, 16]; por tanto, AB, ΓΔ prolongadas no se encuentran en el sentido de B, Δ. De manera semejante demostraríamos que tampoco en el sentido de A, Γ; pero las rectas que no se encuentran en ninguno de los dos sentidos son paralelas [Def. 23]; por tanto, AB es paralela a ΓΔ.

Por consiguiente, si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos alternos iguales entre sí, las dos rectas serán paralelas. Q. E. D.[49].

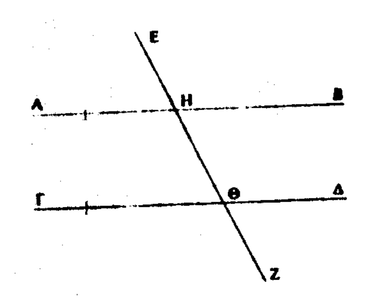
Proposición 28

Si una recta al incidir sobre dos rectas hace el ángulo externo igual al interno y opuesto del mismo lado, o los dos internos del mismo lado iguales a dos rectos, las rectas serán paralelas entre sí.

[49] Con esta proposición comienza la segunda sección del libro I. Hasta aquí Euclides ha tratado principalmente de los triángulos, su construcción y propiedades en el sentido de la relación entre sus partes, lados y ángulos, y la comparación entre triángulos diferentes en lo que se refiere a sus partes y a sus áreas en los casos particulares en los que son congruentes. La segunda sección lleva a la tercera, a partir de la proposición 35, en la que se pasa a la relación entre áreas de triángulos, paralelogramos y cuadrados con una nueva concepción de igualdad de áreas en la que la igualdad no depende de la congruencia. Todo esto requiere el uso de las paralelas. Consecuentemente la segunda sección que empieza en I 27 establece la teoría de las paralelas, introduce el concepto correlativo de la igualdad de la suma de los ángulos de un triángulo a dos rectos (I 32), y finaliza con dos proposiciones que forman la transición a la tercera sección (I 33, y I 34). Éstas introducen el paralelogramo por primera vez.

Así pues, al incidir sobre las dos rectas AB, ΓΔ, haga la recta EZ el ángulo externo EHB igual al interno y opuesto HΘΔ, o los ángulos internos del mismo lado: BHΘ, HΘΔ iguales a dos rectos.

Digo que AB es paralela a ΓΔ [I, 27].



Pues como el (ángulo) EHB es igual al (ángulo) HΘΔ, mientras que el (ángulo) EHB es igual al (ángulo) AHΘ [I, 15]; entonces el (ángulo) AHΘ también es igual al (ángulo) HΘΔ; y son alternos; por tanto, AB es paralela a ΓΔ [I, 27].

Como los (ángulos) BHΘ, HΘΔ son iguales a su vez a dos rectos, también los ángulos AHΘ, BHΘ son iguales a dos rectos, por tanto, los (ángulos) AHΘ, BHΘ son iguales a los (ángulos) BHΘ, HΘΔ; quítese de ambos el ángulo BHΘ; entonces el (ángulo) restante AHΘ es igual al (ángulo) restante HΘΔ; y son alternos. Por tanto, AB es paralela a ΓΔ [I, 27].

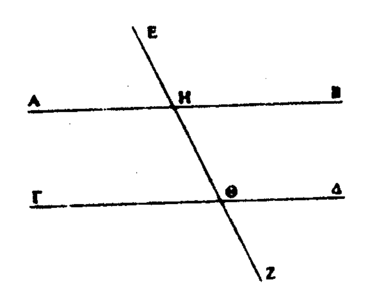
Por consiguiente, si una recta al incidir sobre dos rectas hace el ángulo externo igual al interno y opuesto del mismo lado o los dos internos del mismo lado iguales a dos rectos, las rectas serán paralelas entre sí. Q. E. D.

Proposición 29

La recta que incide sobre rectas paralelas hace los ángulos alternos iguales entre sí, y el (ángulo) externo igual al interno y opuesto, y los (ángulos) internos del mismo lado iguales a dos rectos.

Incida la recta EZ sobre las rectas paralelas AB, ΓΔ.

Digo que hace iguales los ángulos alternos AHΘ, HΘΔ, y el ángulo externo EHB igual al interno y opuesto HΘΔ, y los internos del mismo lado: BHΘ, HΘΔ, iguales a dos rectos.



Pues si AHΘ no es igual a HΘΔ, uno de ellos es mayor. Sea AHΘ el mayor; añádase a ambos el (ángulo) BHΘ; entonces los (ángulos) AHΘ, BHΘ son mayores que los (ángulos) BHΘ, HΘΔ. Pero los (ángulos) AHΘ, BHΘ son iguales a dos rectos [I, 13]. Por tanto, los (ángulos) BHΘ, HΘΔ son menores que dos rectos. Pero las rectas prolongadas indefinidamente a partir de (ángulos) menores que dos rectos se encuentran [Post. 5]; luego las rectas AB, ΓΔ, prolongadas indefinidamente se encontrarán; pero no se encuentran, porque se las ha supuesto paralelas; por tanto,

el (ángulo) AHΘ no es desigual al (ángulo) HΘΔ; luego es igual. Pero el (ángulo) AHΘ es igual al (ángulo) EHB [I, 15]; por tanto, el (ángulo) EHB es también igual al (ángulo) HΘΔ [N. C. 1]. Añádase a ambos BHΘ; entonces los (ángulos) EHB, BHΘ son iguales a los (ángulos) BHΘ, HΘΔ [N. C. 2]. Pero los ángulos EHB, BHΘ son iguales a dos rectos [I, 13]; por tanto, los (ángulos) BHΘ, HΘΔ son también iguales a dos rectos.

Por consiguiente, la recta que incide sobre rectas paralelas hace los ángulos alternos iguales entre sí, y el (ángulo) externo igual al interno y opuesto, y los (ángulos) internos del mismo lado iguales a dos rectos. Q. E. D. [50].

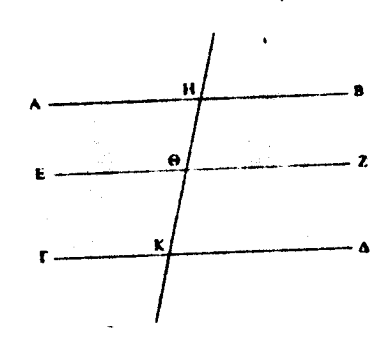
---

[50] Las cuatro proposiciones I 17 —que en principio se supone independiente del postulado quinto—; I 28; I 29 y el postulado mismo de las paralelas constituyen un núcleo de la teoría euclídea comúnmente denominado «cuadro de las paralelas» que ha atraído la atención de los comentadores italianos de Euclides. Es un cuadro de relaciones de implicación de modo que supone la formulación de todas esas proposiciones en términos condicionales y en el contexto de una recta que cae sobre otras dos rectas. Según esto, I 17 se lee: «si la recta al caer forma un triángulo, los ángulos internos del mismo lado suman menos que dos rectos» y reviste —digamos— la forma 'si α, β'. De donde, por contraposición de la implicación, se puede deducir I 28 con la forma 'si no β, no α'. Por otra parte, el postulado quinto se deja leer entonces como el condicional converso de I 17: «si al caer la recta los lados internos del mismo lado suman menos que dos rectos, forma un triángulo», *i. e.* bajo la forma 'si β, α'. Pues bien, del postulado quinto así formulado, por contraposición, se deduce I 29, *i. e.* 'si no α, no β'. Podría ser una muestra de la conversión geométrica que alaba Proclo cuando enumera las excelencias de los *Elementos* (*Com.* 69, 21-22).

Proposición 30

Las paralelas a una misma recta son también paralelas entre sí.

Sean cada una de las (rectas) AB, ΓΔ paralelas a EZ. Digo que también AB es paralela a ΓΔ.



Pues incida sobre ellas la recta HK. Y dado que la recta HK ha incidido sobre las rectas paralelas AB, EZ, entonces el (ángulo) AHK es igual al (ángulo) HΘZ [I, 29]. Como a su vez la recta HK ha incidido sobre las rectas paralelas EZ, ΓΔ, el (ángulo) HΘZ es igual al ángulo HKΔ [I, 29]. Pero se ha demostrado también que el (ángulo) AHK es igual al ángulo HΘZ. Por tanto, el ángulo AHK también es igual al ángulo HKΔ [N. C. 1]; y son alternos. Por tanto, AB es paralela a ΓΔ.

[Por consiguiente, las paralelas a una misma recta son también paralelas entre sí] Q. E. D. [51].

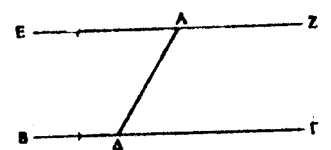
[51] El enunciado de la conclusión no aparece en los principales mss.

Proposición 31

Por un punto dado trazar una línea recta paralela a una recta dada.

Sea A el punto dado y BΓ la recta dada.

Hay que trazar por el punto A una línea recta paralela a BΓ.



Tómese al azar un punto Δ en BΓ y trácese AΔ; y constrúyase en la recta ΔA y en el punto A de ella el ángulo ΔAE igual al (ángulo) AΔΓ [I, 23]; y sea AZ el resultado de prolongar en línea recta EA.

Y dado que la recta AΔ al incidir sobre las dos rectas BΓ, EZ ha hecho iguales los ángulos alternos EAΔ, AΔΓ, entonces EAZ es paralela a BΓ [I, 27].

Por consiguiente, se ha trazado la línea recta EAZ paralela a la recta dada BΓ por el punto dado A. Q. E. F.

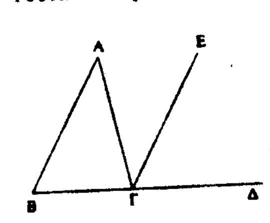
Proposición 32

En todo triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo externo es igual a los dos ángulos internos y opuestos, y los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos rectos.

Sea ABΓ el triángulo, y prolónguese uno de sus lados, BΓ, hasta Δ.

Digo que el ángulo externo ΑΓΔ es igual a los dos internos y opuestos, ΓΑΒ, ΑΒΓ, y los tres ángulos internos del triángulo, ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ son iguales a dos rectos.

Pues trácese por el punto Γ (la recta) ΓΕ paralela a la recta ΑΒ [I, 31].



Y puesto que ΑΒ es paralela a ΓΕ y ΑΓ ha incidido sobre ellas, los ángulos alternos ΒΑΓ, ΑΓΕ son iguales entre sí [I, 29]. Puesto que, a su vez, ΑΒ es paralela a ΓΕ y la recta ΒΔ ha incidido sobre ellas, el (ángulo) externo ΕΓΔ es igual al interno y opuesto ΑΒΓ [I, 29]. Pero se ha demostrado que el (ángulo) ΑΓΕ es también igual al (ángulo) ΒΑΓ; por tanto, el ángulo entero ΑΓΔ es igual a los dos internos y opuestos ΒΑΓ, ΑΒΓ.

Añádase al uno y a los otros el ángulo ΑΓΒ; entonces los (ángulos) ΑΓΔ, ΑΓΒ son iguales a los tres (ángulos) ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ. Pero los (ángulos) ΑΓΔ, ΑΓΒ son iguales a dos rectos [I, 13]; por tanto, los (ángulos) ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ son también iguales a dos rectos.

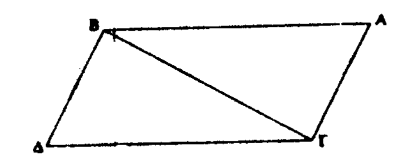
Por consiguiente, en todo triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo externo es igual a los dos ángulos internos y opuestos, y los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos rectos. Q. E. D.

Proposición 33

Las rectas que unen por (los extremos que están en) el mismo lado a (rectas) iguales y paralelas son también ellas mismas iguales y paralelas [32].

[32] *Hai tàs ísus te kai parallélous epi tà autà mérē epidseugnýusai euthefai...* dice literalmente: «las rectas que unen por el mismo lado a iguales y paralelas». He añadido las palabras entre paréntesis con vistas a una mayor claridad, pues la versión literal del enunciado resulta bastante confusa.

Sean ΑΒ, ΓΔ las (rectas) iguales y paralelas y trácense uniéndolas por (los extremos de) el mismo lado las rectas ΑΓ, ΒΔ.



Digo que ΑΓ, ΒΔ son también iguales y paralelas.

Trácese ΒΓ. Y puesto que ΑΒ es paralela a ΓΔ, y ΒΓ ha incidido sobre ellas, los ángulos alternos ΑΒΓ, ΒΓΔ son iguales entre sí [I, 29]. Y puesto que ΑΒ es igual que ΓΔ y ΒΓ es común, las dos (rectas) ΑΒ, ΒΓ son iguales a las dos (rectas) ΒΓ, ΓΔ; y el ángulo ΑΒΓ es igual al ángulo ΒΓΔ; por tanto, la base ΑΓ es igual a la base ΒΔ, y el triángulo ΑΒΓ es igual al triángulo ΒΓΔ, y los ángulos restantes, subtendidos por los lados iguales, serán también iguales respectivamente [I, 4]; por tanto, el ángulo ΑΓΒ es igual al ángulo ΓΒΔ. Y dado que la recta ΒΓ que incide sobre las dos rectas ΑΓ, ΒΔ ha hecho iguales entre sí los ángulos alternos, entonces ΑΓ es paralela a ΒΔ [I, 27]. Pero se ha demostrado que también es igual a ella.

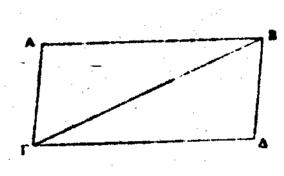
Por consiguiente, las rectas que unen por (los extremos que están en) el mismo lado a (rectas) iguales y paralelas, son también ellas mismas iguales y paralelas. Q. E. D.

Proposición 34

En las áreas de paralelogramos [53] *los lados y los ángulos opuestos son iguales entre sí, y la diagonal* [54] *las divide en dos partes iguales.*

Sea ΑΓΔΒ el área de paralelogramo, y su diagonal ΒΓ.

Digo que los lados y los ángulos opuestos del paralelogramo ΑΓΔΒ son iguales entre sí, y (que) la diagonal ΒΓ lo divide en dos partes (iguales).



Pues como ΑΒ es paralela a ΓΔ, y la recta ΒΓ ha incidido sobre ellas, los ángulos alternos ΑΒΓ, ΒΓΔ son iguales entre sí [I, 29]. Como a su vez ΑΓ es paralela a ΒΔ, y ΒΓ ha incidido sobre ellas, los ángulos alternos ΑΓΒ, ΓΒΔ son iguales entre sí [I, 29]. Entonces ΑΒΓ, ΒΓΔ son dos triángulos que tienen los dos ángulos ΑΒΓ, ΒΓΑ iguales respectivamente a los dos ángulos ΒΓΔ, ΓΒΔ y un lado igual a un lado, el correspondiente a los ángulos iguales, común a ellos: ΒΓ; así pues, también tendrá los lados restantes iguales respectivamente a los lados restantes, y el ángulo restante (igual) al ángulo restante [I, 26]; por tanto, el lado ΑΒ es igual al (lado) ΓΔ, el (lado) ΑΓ al ΒΔ, y además el ángulo ΒΑΓ es igual al (ángulo) ΓΔΒ. Y dado que el ángulo ΑΒΓ es igual al (ángulo) ΒΓΔ, y el (ángulo) ΓΒΔ al (ángulo) ΑΓΒ, entonces el (ángulo) entero ΑΒΔ es igual al (ángulo) entero ΑΓΔ [N. C. 2]. Pero se ha demostrado que el ángulo ΒΑΓ también es igual al ángulo ΓΔΒ.

Por consiguiente, en las áreas de paralelogramos los lados y ángulos opuestos son iguales entre sí.

Digo entonces que también la diagonal las divide en dos partes iguales.

Pues como ΑΒ es igual a ΓΔ y ΒΓ es común, las dos ΑΒ, ΒΓ son iguales respectivamente a las dos ΓΔ, ΒΓ; y el ángulo ΑΒΓ es igual al ángulo ΒΓΔ. Por tanto la base ΑΓ es también igual a ΔΒ. Y el triángulo ΑΒΓ es también igual al triángulo ΒΓΔ [I, 4].

Por consiguiente, la diagonal ΒΓ divide en dos partes (iguales) el paralelogramo ΑΒΓΔ. Q. E. D.

[53] La primera vez que aparecen mencionados los paralelogramos Euclides utiliza *parallelográmmōn chorîōn* («áreas paralelogramas»). Se refiere a áreas limitadas por rectas paralelas. El uso euclídeo impone además la restricción de que esta denominación sólo se aplique a figuras de cuatro lados. Proclo dice que la palabra «paralelogramo» fue introducida por primera vez por Euclides, que su uso estaba sugerido en I, 33, y que la formación de *parallēlógrammon* (de líneas paralelas) fue análoga a la de *euthýgrammos* (de líneas rectas).

[54] La palabra empleada por Euclides es *diámetros*, que en este contexto significa obviamente «diagonal».

Proposición 35

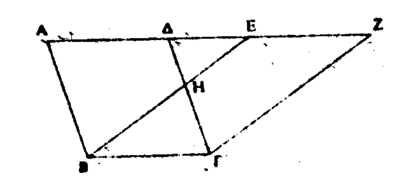
Los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.

Sean ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ los paralelogramos (que están) sobre la misma base ΒΓ y entre las mismas paralelas ΑΖ, ΒΓ.

Digo que (el paralelogramo) ΑΒΓΔ es igual al paralelogramo ΕΒΓΖ.

Pues como ΑΒΓΔ es un paralelogramo, ΑΔ es igual a ΒΓ [I, 34]. Por lo mismo, ΕΖ también es igual a ΒΓ; de

modo que también ΑΔ es igual a ΕΖ [N. C. 1]; y ΔΕ es común; por tanto, la (recta) entera ΑΕ es igual a la recta entera ΔΖ [N. C. 2]. Y ΑΒ es también igual a ΔΓ [I, 34]; entonces los dos (lados) ΕΑ, ΑΒ son iguales respectivamente a los dos (lados) ΖΔ, ΔΓ; y el ángulo ΖΔΓ es igual al ángulo ΕΑΒ, el externo al interno [I, 29]; por tanto, la base ΕΒ es igual a la base ΖΓ, y el triángulo ΕΑΒ será igual al triángulo ΔΖΓ [I, 4]; quítese de ambos el triángulo ΔΗΕ; entonces el trapecio restante ΑΒΗΔ es igual al trapecio restante ΕΗΓΖ [N. C. 3]; añádase a ambos el triángulo ΗΒΓ; entonces el paralelogramo entero ΑΒΓΔ es igual al paralelogramo entero ΕΒΓΖ [N. C. 2].



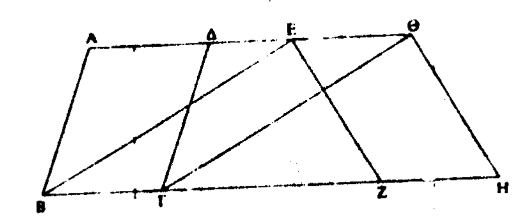
Por consiguiente, los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí. Q. E. D.

Proposición 36

Los paralelogramos que están sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.

Sean ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ los paralelogramos que están sobre bases iguales ΒΓ, ΖΗ y entre las mismas paralelas ΑΘ, ΒΗ.

Digo que el paralelogramo ΑΒΓΔ es igual al paralelogramo ΕΖΗΘ.



Trácense, pues, ΒΕ y ΓΘ. Y dado que ΒΓ es igual a ΖΗ, mientras que ΖΗ es igual a ΕΘ, entonces ΒΓ es también igual a ΕΘ [N. C. 1]. Pero son también paralelas. Y ΕΒ, ΘΓ las unen; pero las (rectas) que unen por (los extremos de) el mismo lado (rectas) iguales y paralelas son iguales y paralelas [I, 33]; por tanto, ΕΒΓΘ es un paralelogramo [I, 34]. Y es igual a ΑΒΓΔ: pues tiene la misma base que él, ΒΓ y está entre las mismas paralelas que él: ΒΓ, ΑΘ [I, 35]. Por lo mismo, ΕΖΗΘ es también igual al mismo ΕΒΓΘ [I, 35]. De modo que el paralelogramo ΑΒΓΔ es también igual a ΕΖΗΘ [N. C. 1].

Por consiguiente, los paralelogramos que están sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales entre sí. Q. E. D.

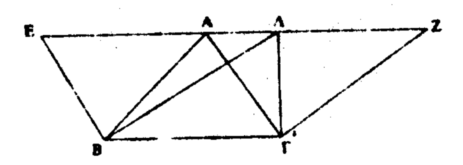
Proposición 37

Los triángulos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.

Sean ΑΒΓ, ΔΒΓ los triángulos que están sobre la misma base ΒΓ y entre las mismas paralelas ΑΔ, ΒΓ.

Digo que el triángulo ΑΒΓ es igual al triángulo ΔΒΓ.

Prolónguese ΑΔ en ambos sentidos hasta E, Z y por el (punto) B trácese BE paralela a ΓΑ [I, 31], y por el punto Γ trácese ΓZ paralela a BΔ [I, 31]. Entonces cada una de las (figuras) EBΓA, ΔBΓZ es un paralelogramo; y son iguales: porque están sobre la misma base BΓ y entre las mismas paralelas BΓ, EZ [I, 35]; y el triángulo ABΓ es la mitad del paralelograma EBΓA: porque la diagonal AB lo divide en dos partes (iguales) [I, 34]; y el triángulo ΔBΓ es la mitad del paralelogramo ΔBΓZ: porque la diagonal ΔΓ lo divide en dos partes (iguales) [I, 34]. [Pero las mitades de cosas iguales son iguales entre sí] [55]. Por tanto, el triángulo ABΓ es igual al triángulo ΔBΓ.



Por consiguiente, los triángulos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí. Q. E. D. [55bis].

[55] Aquí y en la proposición siguiente, Heiberg suprime las palabras *tà tôn ísōn hemísē ísa allḗlois estín*. La noción común a que hace referencia es una interpolación muy antigua (anterior a Teón); por lo tanto, es probable que estas palabras fueran interpoladas en la misma época.

Los teoremas I, 35, y I, 37 muestran que dos figuras planas pueden tener la misma superficie sin contar con el mismo perímetro. Este resultado muestra el error de los navegantes que creían calcular el área de una isla por el tiempo empleado en bordear su perímetro (Tucídides, *Historia de la Guerra del Peloponeso* VI 1).

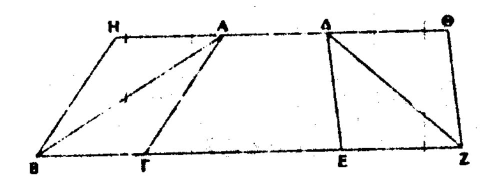
[55bis] Heiberg considera esta frase como una interpolación sobre la base de *Fayûm*, pág. 96, núm. 9 (ver Heath, ed. cit., 1, 1926², pág. 337). Stamatis la mantiene sin la menor reserva.

Proposición 38

Los triángulos que están sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.

Sean ABΓ, ΔEZ los triángulos (que están) sobre las bases iguales BΓ, EZ y entre las mismas paralelas BZ, AΔ.

Digo que el triángulo ABΓ es igual al triángulo ΔEZ.



Prolónguese, pues, AΔ en ambos sentidos hasta H, Θ, y por el (punto) B trácese BH paralela a ΓA [I, 31], y por el (punto) Z trácese ZΘ paralela a ΔE. Entonces cada una de las (figuras) HBΓA, ΔEZΘ es un paralelogramo; y HBΓA es igual a ΔEZΘ: porque está sobre las bases iguales BΓ, EZ y entre las mismas paralelas BZ, HΘ [I, 36]; y el triángulo ABΓ es la mitad del paralelogramo HBΓA: porque la diagonal AB lo divide en dos partes iguales [I, 34]; y el triángulo ZEΔ es la mitad del paralelogramo ΔEZΘ: porque la diagonal ΔZ lo divide en dos partes iguales [I, 34]; [y las mitades de las mismas cosas son iguales entre sí] [56]. Por tanto, el triángulo ABΓ es igual al triángulo ΔEZ.

Por consiguiente, los triángulos que están sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales entre sí. Q. E. D.

[56] Cf. nota 55 bis.

PROPOSICIÓN 39

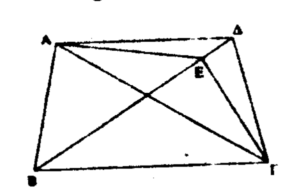
Los triángulos iguales que están sobre la misma base y en el mismo lado, están también entre las mismas paralelas.

Sean ΑΒΓ, ΔΒΓ triángulos iguales que están sobre la misma base ΒΓ y en el mismo lado de ella.

[Digo que también están entre las mismas paralelas] [56bis].

[Pues] trácese ΑΔ.

Digo que ΑΔ es paralela a ΒΓ.



Pues si no trácese por el (punto) Α la recta ΑΕ paralela a ΒΓ [I, 31], y trácese ΕΓ. Entonces el triángulo ΑΒΓ es igual al triángulo ΕΒΓ: porque está sobre la misma base que él, ΒΓ, y entre las mismas paralelas [I, 37]. Pero ΑΒΓ es igual a ΔΒΓ; por tanto, ΔΒΓ es también igual a ΕΒΓ [N. C. 1], el mayor al menor; lo cual es imposible; por tanto, ΑΕ no es paralela a ΒΓ. De manera semejante demostraríamos que ninguna otra (lo es) excepto ΑΔ; por tanto, ΑΔ es paralela a ΒΓ.

Por consiguiente, los triángulos iguales que están sobre la misma base y en el mismo lado, están también entre las mismas paralelas. Q. E. D.

[56bis] Cf. nota 55bis.

PROPOSICIÓN 40

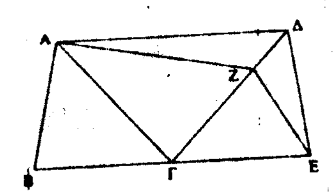
Los triángulos iguales que están sobre bases iguales y en el mismo lado, están también entre las mismas paralelas.

Sean ΑΒΓ, ΓΔΕ triángulos iguales que están sobre las bases iguales ΒΓ, ΓΕ y en el mismo lado.

Digo que también están entre las mismas paralelas.

Pues trácese ΑΔ.

Digo que ΑΔ es paralela a ΒΕ.



Pues si no, por el punto Α trácese ΑΖ paralela a ΒΕ [I, 31], trácese además ΖΕ. Entonces el triángulo ΑΒΓ es igual al triángulo ΖΓΕ: porque están sobre las bases iguales ΒΓ, ΓΕ y entre las mismas paralelas ΒΕ, ΑΖ [I, 38]. Pero el triángulo ΑΒΓ es igual al [triángulo] ΔΓΕ; por tanto, el [triángulo] ΔΓΕ es también igual al triángulo ΖΓΕ [N. C. 1], el mayor al menor: lo cual es imposible; por tanto, ΑΖ no es paralela a ΒΕ. De manera semejante demostraríamos que ninguna otra (lo es) excepto ΑΔ; por tanto, ΑΔ es paralela a ΒΕ.

Por consiguiente, los triángulos iguales que están sobre bases iguales y en el mismo lado, están también entre las mismas paralelas [Q. E. D.] [57].

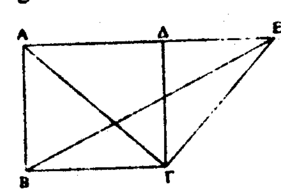
[57] Heiberg considera que esta proposición es una interpolación introducida por alguien que pensó que debía haber una proposición que si-

Proposición 41

Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y está entre las mismas paralelas, el paralelogramo es el doble del triángulo.

Tenga el paralelogramo ABΓΔ la misma base, BΓ, que el triángulo EBΓ y esté entre las mismas paralelas BΓ, AE.

Digo que el paralelogramo ABΓΔ es el doble del triángulo BEΓ.



Pues trácese AΓ. Entonces el triángulo ABΓ es igual al triángulo EBΓ: porque está sobre la misma base que él, BΓ, y entre las mismas paralelas BΓ, AE [I, 37]. Pero el paralelogramo ABΓΔ es el doble del triángulo ABΓ: porque la diagonal AΓ lo divide en dos partes (iguales) [I, 34]; de modo que el paralelogramo ABΓΔ es también el doble del triángulo EBΓ.

Por consiguiente, si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y está entre las mismas paralelas, el paralelogramo es el doble del triángulo. Q. E. D.

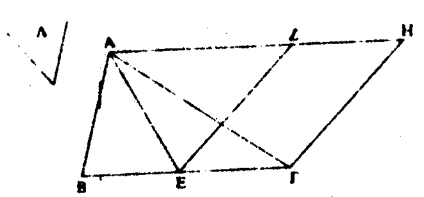
Proposición 42

Construir en un ángulo rectilíneo dado un paralelogramo igual a un triángulo dado.

Sea ABΓ el triángulo dado y Δ el ángulo rectilíneo dado.

guiera a I 39 y estuviera relacionada con ella de la misma manera que I 38 está relacionada con I 37, y I 36 con I 35. Sin embargo, aparece en los principales mss. y en la edición de Stamatis.

Así pues, hay que construir un paralelogramo igual al triángulo ABΓ en el ángulo rectilíneo Δ.



Divídase BΓ en dos por el punto E, trácese AE, y constrúyase en la recta EΓ y en su punto E el (ángulo) ΓEZ igual al ángulo Δ [I, 23], y por el (punto) A trácese AH paralela a EΓ [I, 31], y por el (punto) Γ trácese ΓH paralela a EZ; entonces ZEΓH es un paralelogramo. Y como BE es igual a EΓ, el triángulo ABE es también igual al triángulo AEΓ: porque están sobre las bases iguales BE, EΓ y entre las mismas paralelas BΓ, AH [I, 38]; por tanto, el triángulo ABΓ es el doble del triángulo AEΓ. Pero también el paralelogramo ZEΓH es el doble del triángulo AEΓ: porque tiene la la misma base que él y está entre las mismas paralelas [I, 41]; por tanto, el paralelogramo ZEΓH es igual al triángulo ABΓ. Y tiene el ángulo ΓEZ igual al (ángulo) dado Δ.

Por consiguiente, se ha construido el paralelogramo ZEΓH igual al triángulo dado ABΓ, en el ángulo ΓEZ, que es igual al Δ. Q. E. F.

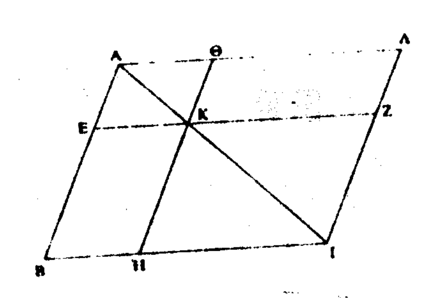
Proposición 43

En todo paralelogramo los complementos[58] *de los paralelogramos situados en torno a la diagonal son iguales entre sí.*

[58] *Paraplerómata*, «complementos», son las figuras que quedan entre los paralelogramos situados en torno a la diagonal y completan el parale-

Sea ABΓΔ el paralelogramo y AΓ su diagonal, y sean EΘ, ZH los paralelogramos (situados) en torno a AΓ, y sean BK, KΔ los llamados complementos.

Digo que el complemento BK es igual al complemento KΔ.



Pues, como ABΓΔ es un paralelogramo y AΓ su diagonal, el triángulo ABΓ es igual al triángulo AΓΔ [I, 34]; como EΘ es a su vez un paralelogramo y AK es su diagonal, el triángulo AEK es igual al triángulo AΘK. Por la misma razón, el triángulo KZΓ es también igual al triángulo KHΓ. Así pues, como el triángulo AEK es igual al triángulo AΘK, y el triángulo KZΓ al KHΓ, el triángulo AEK junto con KHΓ es igual al triángulo AΘK junto con KZΓ [N. C. 2]; pero también el triángulo entero ABΓ es igual al (triángulo) entero AΔΓ; por tanto, el complemento restante BK es igual al complemento restante KΔ [N. C. 3].

Por consiguiente, en todo paralelogramo los complementos de los paralelogramos (situados) en torno a la diagonal son iguales entre sí. Q. E. D.

logramo. La fr[illegible] de la *ékthesis* [...] «los llamados complementos» indica que el uso técnico de *paraplerómata* no es nuevo para Euclides, aunque tal vez no fuera de dominio público común.

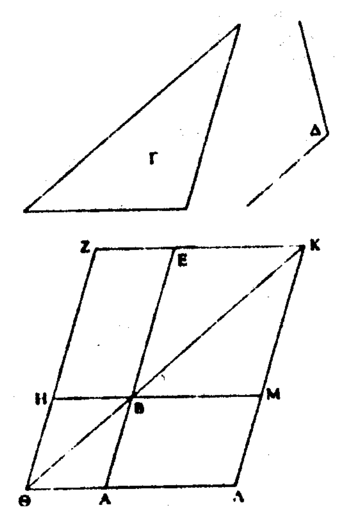
PROPOSICIÓN 44

Aplicar a una recta dada en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a un triángulo dado[59].

[59] Merece destacarse este resultado que permite la transformación de un paralelogramo de cualquier tamaño en otro con el mismo ángulo y de área igual, pero con un lado de cualquier longitud dada. También es interesante el procedimiento empleado, el método de aplicación de áreas, cuyo uso se remonta a los pitagóricos. Proclo le dedica una larga nota (*Com.* 419, 15-420, 23) que comienza así: «Estas cosas, según Eudemo, son antiguas y fueron invención de la Musa de los pitagóricos, quiero decir la aplicación de áreas por yuxtaposición [*parabolê tôn chorîôn*], por exceso [*hyperbolê*] y por defecto [*élleipsis*]. Los geómetras posteriores tomaron estas denominaciones de los pitagóricos y las trasladaron a las líneas llamadas *cónicas*, de modo que una de ellas nombra la parábola, otra la hipérbola y otra la elipse, mientras que los hombres de la Antigüedad, semejantes a dioses, veían que estos términos significaban la construcción de áreas, en el plano, sobre una línea recta finita. Pues cuando se tiene una línea recta y se extiende el área a todo lo largo de la línea, dicen que se aplica o yuxtapone el área; pero cuando se hace la longitud del área mayor que la propia línea recta, dicen que la excede, y cuando se hace menor, en cuyo caso hay alguna parte de la línea recta que sobrepasa el área trazada, entonces dicen que es deficiente». En otras palabras, el procedimiento por defecto consiste en aplicar un rectángulo (o más en general un paralelogramo) a un segmento de modo que resulte deficiente en un cuadrado (o en una figura rectilínea dada), y por lo regular requiere el uso de un *diorismós;* el procedimiento por exceso corresponde al caso de que el área aplicada exceda del segmento dado de modo similar a como se producía en el caso anterior; el procedimiento de aplicación o yuxtaposición utiliza un paralelogramo de área igual a la figura rectilínea dada. Éste es el empleo en las proposiciones I, 44-45. El uso de *parábola, hipérbola* y *elipse* en el estudio de las secciones cónicas no será simplemente un desplazamiento terminológico a otro dominio de referencia, sino que, desde Apolonio al menos, representará así mismo un cambio de marco conceptual.

Sea AB la recta dada, Γ el triángulo dado y Δ el ángulo rectilíneo dado.

Así pues, hay que aplicar a la recta dada AB, en un ángulo igual a Δ, un paralelogramo igual al triángulo dado Γ.



Constrúyase el paralelogramo BEZH igual al triángulo Γ en el ángulo EBH, que es igual al Δ [I, 42]; y hágase de manera que BE esté en línea recta con AB y prolónguese hacia el otro lado ZH hasta Θ, y por el (punto) A trácese AΘ paralela a una de las dos rectas BH, EZ [I, 31], y trácese ΘB. Y dado que la recta ΘZ incide sobre las paralelas AΘ, EZ, entonces los ángulos AΘZ, ΘZE son iguales a dos rectos [I, 29]. Por tanto, los ángulos BΘH, HZE son menores que dos rectos y las rectas prolongadas indefinidamente a partir de ángulos menores que dos rectos, se encuentran [Post. 5]; luego ΘB, ZE prolongadas se encontrarán. Prolónguense y encuéntrense en K, y por el punto K trácese KΛ paralela a las dos rectas EA, ZΘ [I, 31] y prolónguense ΘA, HB hasta los puntos KΛ, M. Entonces ZΛKΘ es un paralelogramo y ΘK su diagonal, y AH, ME los paralelogramos (situados) en torno a ΘK, y ΛB, BZ los llamados complementos; por tanto, ΛB es igual a BZ [I, 43]. Pero BZ es igual al triángulo Γ; luego ΛB es también igual a Γ [N. C. 1]. Y como el ángulo HBE es igual al (ángulo) ABM [I, 15], mientras que el ángulo HBE es igual a Δ, entonces el ángulo ABM es también igual al ángulo Δ.

Por consiguiente, se ha aplicado a la recta dada AB el paralelogramo ΛB igual al triángulo dado Γ, en el ángulo ABM que es igual a Δ. Q. E. F.

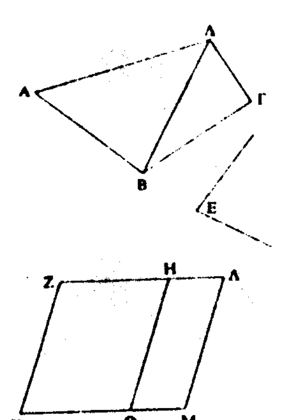
Proposición 45

Construir en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a una (figura) rectilínea dada [60]

[60] Si las proposiciones I 43-45 nos introducen en el ámbito metódico de la transformación de áreas, también abren la perspectiva de lo que se ha dado en llamar «el álgebra geométrica» de los griegos (vid. *supra*, Introducción, III, § 2). Si un rectángulo corresponde en álgebra al producto de dos magnitudes, se puede considerar la aplicación a una recta dada de un rectángulo igual a una área determinada como el correlato geométrico de una división algebraica del producto de dos cantidades por una tercera. El procedimiento permite así mismo añadir o sustraer áreas rectilíneas y representar la suma o la diferencia por un rectángulo de cualquier longitud dada, de modo parejo a lo que sería la obtención de un factor común. Proclo, a propósito de I 45, sugiere que en su opinión fue la solución de este problema la que llevó a los antiguos geómetras a investigar la cuadratura del círculo. «Pues si cabe hallar un paralelogramo igual a otra figura rectilínea cualquiera, vale la pena plantearse si no será posible también probar la existencia de una figura rectilí-

Sea ABΓΔ la (figura) rectilínea dada y E el ángulo rectilíneo dado.

Así pues, hay que construir en el ángulo dado E, un paralelogramo igual a la figura rectilínea dada ABΓΔ.



Trácese ΔB, y constrúyase en el ángulo ΘKZ, que es igual a E, el paralelogramo ZΘ igual al triángulo ABΔ [I, 42]; y aplíquese a la recta HΘ, el paralelogramo HM igual al triángulo ΔBΓ en el ángulo HΘM, que es igual a E [I, 44]. Y puesto que el ángulo E es igual a cada uno de los dos (ángulos) ΘKZ, HΘM, también el (ángulo) ΘKZ es, por tanto, igual al (ángulo) HΘM [N. C. 1]. Añádase a ambos el ángulo KΘH; entonces los (ángulos) ZKΘ, KΘH son iguales a los (ángulos) KΘH, HΘM. Pero los (ángulos) ZKΘ, KΘH son iguales a dos rectos [I, 29]; por tanto, los (ángulos) KΘH, HΘM son también iguales a dos rectos. Entonces en una recta cualquiera HΘ y en un punto de ella Θ, las dos rectas KΘ, ΘM, no colocadas en el mismo lado, hacen los ángulos adyacentes iguales a dos rectos; luego KΘ está en línea recta con ΘM [I, 14]; y como la recta ΘH incide sobre las paralelas KM, ZH, los ángulos alternos MΘH, ΘHZ son iguales entre sí [I, 29]; añádase a ambos el (ángulo) ΘHΛ; entonces los (ángulos) MΘH, ΘHΛ son iguales a los ángulos ΘHZ, ΘHΛ [N. C. 2]. Pero los (ángulos) MΘH, ΘHΛ son iguales a dos rectos [I, 29]; luego los ángulos ΘHZ, ΘHΛ son también iguales a dos rectos [N. C. 1]; por tanto, ZH está en línea recta con HΛ [I, 14]. Y dado que ZK es igual y paralela a ΘH [I, 34], pero también ΘH a MΛ, entonces también KZ es igual y paralela a MΛ [N. C. 1; I, 30]; y las rectas KM, ZΛ las unen (por sus extremos); luego también KM, ZΛ son iguales y paralelas [I, 33]; por tanto, KZΛM es un paralelogramo. Y dado que el triángulo ABΔ es igual al paralelogramo ZΘ, y el (triángulo) ΔBΓ al (paralelogramo) HM, entonces la (figura) rectilínea entera ABΓΔ es igual al paralelogramo entero KZΛM.

Por consiguiente, se ha construido en el ángulo ZKM, que es igual al (ángulo) dado E, el paralelogramo KZΛM igual a la (figura) rectilínea dada ABΓΔ. Q. E. F.

nea igual a una área circular» (*Com.* 422, 24-423, 2). Puede que este problema de la cuadratura del círculo se planteara inicialmente como una extensión de los métodos elementales de la geometría plana, como si se tratara de un problema *plano*, antes de caer en la cuenta de que la empresa estaba condenada al fracaso. *Vid.* T. L. Heath (1981[2]): *A History of Greek Mathematics...*, op. cit., I, vii, págs. 218 ss.

Proposición 46

Trazar un cuadrado a partir de una recta dada [61].

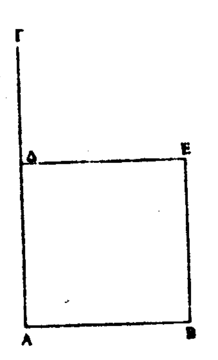
Sea AB la recta dada.

Así pues, hay que trazar un cuadrado a partir de AB.

Trácese la recta AΓ que forme ángulos rectos con la recta AB desde su punto A, y hágase AΔ igual a AB; y por

[61] Euclides utiliza distintos verbos para referirse a la construcción de distintas figuras geométricas. Para dibujar un cuadrado a partir de un lado la expresión usada es *anagrápsai apó*, mientras que en el caso del triángulo utiliza *systésasthai*, o para describir un círculo, *gráphesthai*. *Anagrápho apó* indica la acción de dibujar repetidamente a partir de una recta dada (un lado) las demás rectas (lados) que cierran un cuadrado.

el punto Δ trácese ΔE paralela a AB, y por el punto B trácese BE paralela a AΔ [I, 31]. Entonces AΔEB es un paralelogramo; por tanto, AB es igual a ΔE, y AΔ a BE [I, 34]. Pero AB es igual a AΔ; luego las cuatro rectas BA, AΔ, ΔE, EB son iguales entre sí; entonces el paralelogramo AΔEB es equilátero.



Además digo que también es rectangular. Pues, dado que la recta AΔ incide sobre las paralelas AB, ΔE, entonces los ángulos BAΔ, AΔE son iguales a dos rectos [I, 29]. Pero el ángulo BAΔ es recto; por tanto, el (ángulo) AΔE también es recto. Ahora bien, en las áreas de paralelogramos los lados y ángulos opuestos son iguales entre sí [I, 34]; por tanto, cada uno de los ángulos opuestos ABE, BEΔ también es recto; luego AΔEB es rectangular. Pero se ha demostrado que también es equilátero.

Por consiguiente, es un cuadrado; y está trazado a partir de la recta AB. Q. E. F.

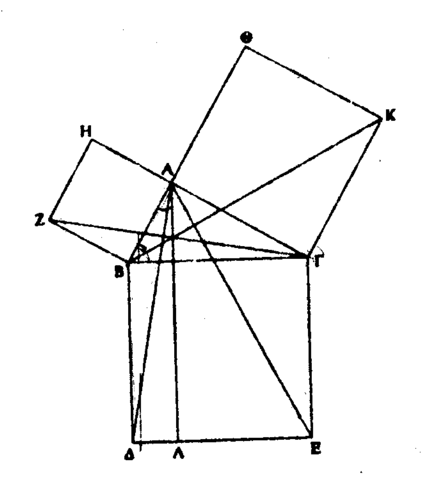
Proposición 47

En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.

Sea ABΓ el triángulo rectángulo que tiene el ángulo recto BAΓ.

Digo que el cuadrado de BΓ es igual a los cuadrados de BA, AΓ.

Trácese pues a partir de BΓ el cuadrado BΔEΓ, y a partir de BA, AΓ los cuadrados HB, ΘΓ [I, 46], y por el (punto) A trácese AΛ paralela a una de las dos (rectas) BΔ, ΓE; y trácense AΔ, ZΓ. Y dado que cada uno de los ángulos BAΓ, BAH es recto, entonces en una recta cualquiera BA y por un punto de ella, A, las dos rectas AΓ, AH, no colocadas



en el mismo lado, hacen los ángulos adyacentes iguales a dos rectos; por tanto, Γ[illegible] está en línea recta con AH [I, 14]. Por la misma razó[illegible] BA también está en línea recta con AΘ. Y como el ángulo ΔBΓ es igual al (ángulo) ZBA —porque cada uno (de ellos) es recto— añádase a ambos el (ángulo) ABΓ; entonces el (ángulo) entero ΔBA es igual al (ángulo) entero ZBΓ [N. C. 2]; y como ΔB es igual a BΓ, y ZB a BA, los dos (lados) ΔB, BA son iguales respectivamente a los dos (lados) ZB, BΓ; y el ángulo ΔBA es igual al ángulo ZBΓ; entonces la base AΔ es igual a la base ZΓ, y el triángulo ABΔ es igual al triángulo ZBΓ [I, 4]; y el paralelogramo BΛ es el doble del triángulo ABΔ: porque

tienen la misma base ΒΛ y están entre las mismas paralelas ΒΛ, ΑΛ [I, 41]; pero el cuadrado ΗΒ es el doble del triángulo ΖΒΓ: porque tienen a su vez la misma base ΖΒ y están entre las mismas paralelas ΖΒ, ΗΓ [I, 41]; [pero los dobles de cosas iguales son iguales entre sí] [62]; por tanto, el paralelogramo ΒΛ es también igual al cuadrado ΗΒ. De manera semejante, trazando las (rectas) ΑΕ, ΒΚ se demostraría que también el paralelogramo ΓΛ es igual al cuadrado ΘΓ; por tanto, el cuadrado entero ΒΔΕΓ es igual a los cuadrados ΗΒ, ΘΓ [N. C. 2]. Asimismo, el cuadrado ΒΔΕΓ ha sido trazado a partir de ΒΓ, y los (cuadrados) ΗΒ, ΘΓ a partir de ΒΑ, ΑΓ. Por tanto, el cuadrado del lado ΒΓ es igual a los cuadrados de los lados ΒΑ, ΑΓ.

Por consiguiente, en los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto. Q. E. D. [63].

---

[62] Heiberg suprime las palabras *tà dè tôn isōn diplásia isa allélois estín*. Aluden a una noción común interpolada. Ver nota 19.

[63] Según Proclo *(Com.* 426, 6-15): «Si escuchamos a quienes gustan de narrar cosas antiguas, hallaremos que atribuyen este teorema a Pitágoras y dicen que sacrificó un buey por su descubrimiento. Por mi parte, aunque admiro a los que conocieron primero la verdad de este teorema, más me maravilla el autor de los *Elementos*, no sólo por establecerlo mediante una clara demostración, sino por haber sentado en el libro sexto (VI, 31) una proposición aún más general con las pruebas incontestables de la ciencia». Esta apreciación de Proclo se ha hecho incluso más sabia con el paso del tiempo. Hoy podemos reconocer que las nociones tendenciosamente llamadas «triángulo pitagórico» *(i. e.* el triángulo rectángulo en el que los tres lados son proporcionales a 3 enteros x, y, z que satisfagan la condición del «teorema de Pitágoras»: $x^2 + y^2 = z^2$), o «triplo pitagórico» —*i. e.* cualquier triplo de enteros $< x, y, z >$ que satisfaga la misma condición—, eran nociones familiares para las matemáticas prehelénicas y no estaban ausentes de otras culturas muy

Proposición 48

Si en un triángulo el cuadrado de uno de los lados es igual a los cuadrados de los dos lados restantes del triángulo, el ángulo comprendido por esos lados restantes del triángulo es recto.

Sea, pues, el cuadrado del lado ΒΓ del triángulo ΑΒΓ, igual a los cuadrados de los lados ΒΑ, ΑΓ.

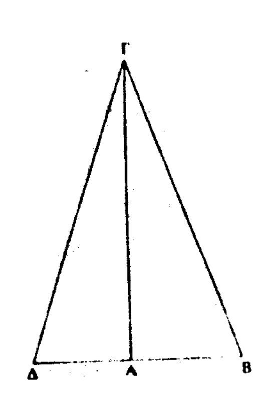
Digo que el ángulo ΒΑΓ es recto.

Pues trácese la (recta) ΑΔ que forme ángulos rectos con la recta ΑΓ desde el punto Α y hágase ΑΔ igual a ΒΑ, y trácese ΔΓ. Puesto que ΔΑ es igual a ΑΒ, el cuadrado de

---

dispares. Hay usos de los triángulos y de los triplos «pitagóricos» entre los *harpedonáptai* egipcios (p. Berlín 6619), en el texto cuneiforme Plimpton 322 (que corresponde a la dinastía de Hammurabi); en los *Sulvasutras*, manuales indios de construcción de altares (compuestos hacia 500-200 a. C., aunque se hagan eco de conocimientos anteriores); en el capítulo noveno de la colección china de problemas «Nueve capítulos sobre el arte de la matemática» (escrito durante el período Han, entre el 200 a. C. y el 220 d. C.). Van der Waerden, a la luz de estos datos, ha llegado a conjeturar la existencia de una tradición ramificada (egipcia, babilonia, india, griega, china), derivada de un origen común que se remontaría al neolítico europeo, *vid.* B. L. van der Waerden, *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Berlín-Heidelberg-Nueva York, 1983, caps. 1-2, págs. 1-69. Su conjetura también se remite a la hipótesis de Seidenberg del origen ritual de la geometría, en particular en el caso indio, *vid.* A. Seidenberg, «The ritual origin of Geometry», *Archive for History of Exact Sciences*, 1 (1962), 69-82; «The origin of Mathematics», *ibid.* 18 (1978), 301-342. Pero no hay constancia de que las comprobaciones y reglas prácticas que acompañan a veces a los triplos babilonios e indios fueran demostraciones propiamente dichas; tampoco la hay de que el resultado o «teorema» de Pitágoras se sentara deductivamente como un teorema efectivo.

ΔΑ es también igual al cuadrado de ΑΒ. Añádase a ambos el cuadrado de ΑΓ; entonces los cuadrados de ΔΑ, ΑΓ son iguales a los cuadrados de ΒΑ, ΑΓ. Pero el cuadrado de ΔΓ es igual a los cuadrados de ΔΑ, ΑΓ: porque el ángulo ΔΑΓ es recto [I, 47]; pero el cuadrado de ΒΓ es igual a los cuadrados de ΒΑ, ΑΓ: porque esto es lo que se ha supuesto; por tanto, el cuadrado de ΔΓ es igual al cuadrado de ΒΓ; de modo que también el lado ΔΓ es igual al (lado) ΒΓ; y como ΔΑ es igual a ΑΒ, y ΑΓ es común, los dos (lados) ΔΑ, ΑΓ son iguales a los dos (lados) ΒΑ, ΑΓ; y la base ΔΓ es igual a la base ΒΓ; por tanto, el (ángulo) ΔΑΓ es igual al (ángulo) ΒΑΓ [I, 8]. Pero ΔΑΓ es recto; luego también es recto el (ángulo) ΒΑΓ.



Por consiguiente, si en un triángulo el cuadrado de uno de los lados es igual a los cuadrados de los dos restantes del triángulo, el ángulo comprendido por esos lados restantes del triángulo es recto. Q. E. D.

LIBRO SEGUNDO

DEFINICIONES

1) De todo paralelogramo rectangular se dice que está comprendido por las dos rectas que comprenden el ángulo recto.

2) En toda área de paralelogramo llámese gnomon a uno cualquiera de los paralelogramos situados en torno a su diagonal junto con los dos complementos [64].

---

[64] La referencia al *gnómōn* más antigua que conocemos se encuentra en HERÓDOTO (II 109): «... los griegos aprendieron de los babilonios el *pólos*, el *gnómōn* y la división del día en doce partes».

Según Suidas, fue Anaximandro quien introdujo el *gnómon* en Grecia. Se trataba de un instrumento consistente en una vara perpendicular al horizonte, cuya sombra proyectada sobre un plano o círculo servía para medir el tiempo: la sombra más corta del día corresponde al mediodía, la más corta del año al solsticio de verano y la más larga al de invierno. Fue muy utilizado hasta la época alejandrina. El *pólos* era un instrumento parecido cuyo uso no se basaba en la longitud de la sombra sino en la dirección marcada por la translación (aparente) del sol.

Enópides de Quíos llamaba *katá gnómona* a la perpendicular trazada desde un punto a una recta. Más tarde encontramos el término utilizado para designar un intrumento en forma de L que servía para dibujar ángu-

PROPOSICIÓN 1

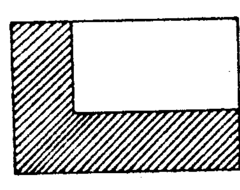
Si hay dos rectas y una de ellas se corta en un número cualquiera de segmentos, el rectángulo comprendido por las dos rectas es igual a los rectángulos comprendidos por la (recta) no cortada y cada uno de los segmentos [65].

Sean A, BΓ dos rectas y córtese al azar BΓ en los puntos Δ, E.

---

los rectos. Es natural que a partir de la forma de dicho instrumento se llamara *gnômōn* a la figura que queda después de quitar, de la esquina de un cuadrado, otro cuadrado más pequeño (o, según Aristóteles, a la figura que, añadida a un cuadrado, aumenta sus lados pero no altera su forma). Los pitagóricos usan el término en este sentido y, en aritmética, para referirse al número que hay que añadir para pasar de un número figurado al siguiente de la misma naturaleza.

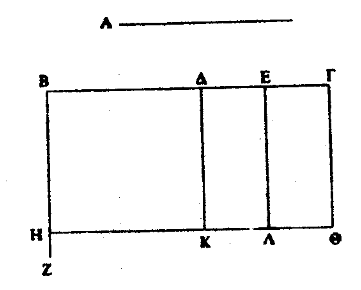
Euclides amplía el significado de *gnômōn* aplicándolo a paralelogramos en general. Más tarde encontramos otra definición en HERÓN DE ALEJANDRÍA (Def. 58) como cualquier figura que, añadida a otra, hace la figura entera semejante a aquella a la que ha sido añadida. Según esto, si el paralelogramo es un rectángulo, la parte rayada de la figura adjunta sería un *gnômōn*.



[65] Los pitagóricos y matemáticos griegos posteriores hablan de distintas clases de números según las distintas figuras geométricas que formen (números triangulares, cuadrados, planos, sólidos etc.). Un número plano sería el número resultante de la multiplicación de otros dos números a los que se refieren como «lados», a veces como «longitud» y «anchura» respectivamente, del número que es su producto.

Por otra parte, este libro II ha sido uno de los pretextos más socorridos para hablar del «álgebra geométrica» de los griegos. En particular las diez primeras proposiciones suelen representarse en esta perspectiva con la forma de ecuaciones. La fórmula correspondiente a la presente proposición sería: $a(b + c + d...) = ab + ac + ad...$

Digo que el rectángulo comprendido por A, BΓ es igual al rectángulo comprendido por A, BΔ y el (comprendido) por A, ΔE y además el (comprendido) por A, EΓ [66].



Pues trácese a partir del (punto) B la (recta) BZ que forme ángulos rectos con BΓ [I, 11], y hágase BH igual a A [I, 3], y por el punto H trácese HΘ paralela a BΓ [I, 31], y por los (puntos) Δ, E, Γ trácense ΔK, EΛ, ΓΘ paralelas a BH.

Entonces el (rectángulo) [66bis] BΘ es igual a los (rectángulos) BK, ΔΛ, EΘ. Ahora bien, BΘ es el (rectángulo comprendido) por A, BΓ: porque está comprendido por HB, BΓ, y BH es igual a A; pero BK es el (rectángulo comprendido) por A, BΔ: porque está comprendido por HB, BΔ, y BH es

---

[66] La expresión más común para referirse a un rectángulo es *tò hypò tôn* seguido de las letras que definen los dos lados que forman el ángulo recto, por ej., *tò hypò tôn* AB, BΓ, expresión abreviada a partir de: *tò hypò tôn* AB, BΓ *periechómenon orthogônion.* En griego el artículo neutro es suficiente para saber que se trata de un rectángulo y no de un ángulo, que llevaría artículo femenino. En español, sin embargo, es necesario incluir las palabras «rectángulo comprendido» para entender a qué se refiere el texto. Cuando dichas palabras no aparecen en griego, las pongo entre paréntesis. Otra manera de referirse tanto a rectángulos como a cuadrados es citando su diagonal.

[66bis] Cf. nota 66.

igual a A. Y ΔΛ es el (rectángulo comprendido) por A, ΔE: porque ΔK, es decir BH [I, 34] es igual a A. Y además, del mismo modo EΘ es el (rectángulo comprendido) por A, EΓ; así pues, el (rectángulo comprendido) por A, BΓ es igual al (rectángulo comprendido) por A, BΔ y el (comprendido) por A, ΔE, y además el (comprendido) por A, EΓ.

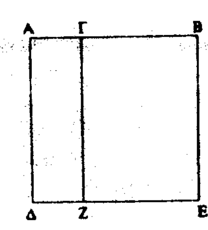
Por consiguiente, si hay dos rectas y una de ellas se corta en un número cualquiera de segmentos, el rectángulo comprendido por las dos rectas es igual a los rectángulos comprendidos por la (recta) no cortada y cada uno de los segmentos. Q. E. D.

Proposición 2

Si se corta al azar una línea recta, el rectángulo comprendido por la (recta) entera y cada uno de los segmentos es igual al cuadrado de la (recta) entera [67].

Córtese, pues, la recta AB al azar en el punto Γ.

Digo que el rectángulo comprendido por AB, BΓ junto con el rectángulo comprendido por BA, AΓ es igual al cuadrado de AB [68].



Pues constrúyase a partir de AB el cuadrado AΔEB [I, 46], y trácese por el punto Γ la (recta) ΓZ paralela a una de las dos (rectas) AΔ, BE [I, 31].

Entonces el (rectángulo) AE es igual a los (rectángulos) AZ, ΓE. Ahora bien, AE es el cuadrado de AB, pero AZ es el rec-

[67] La expresión algebraica de este teorema es $(a+b)a + (a+b)b = (a+b)^2$.

[68] *Tò apò tês* BΓ *tetrágōnon*. Euclides utiliza aquí la expresión completa para referirse a un cuadrado. Es muy frecuente que la palabra *tetrá-*

tángulo comprendido por BA, AΓ: porque está comprendido por ΔA, AΓ, y AΔ es igual a AB; y ΓE es el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ: porque BE es igual a AB. Por tanto, el (rectángulo comprendido) por BA, AΓ junto con el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es igual al cuadrado de AB.

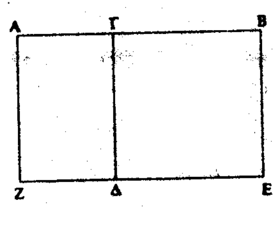
Por consiguiente, si se corta al azar una línea recta, el rectángulo comprendido por la (recta) entera y cada uno de los segmentos es igual al cuadrado de la (recta) entera. Q. E. D.

Proposición 3

Si se corta al azar una línea recta, el rectángulo comprendido por la recta entera y uno de los segmentos es igual al rectángulo comprendido por los segmentos y el cuadrado del segmento primeramente dicho [69].

Córtese, pues, al azar la recta AB en Γ.

Digo que el rectángulo comprendido por AB, BΓ es igual al rectángulo comprendido por AΓ, ΓB junto con el cuadrado de BΓ.



Pues constrúyase a partir de ΓB el cuadrado ΓΔEB [I, 46], y prolónguese EΔ hasta Z, y por el (punto) A trácese AZ paralela a una de las dos (rectas) ΓΔ, BE [I, 31]. Entonces AE es igual a AΔ, ΓE; ahora bien, AE es el rectángulo comprendido por AB, BΓ: porque está comprendido por AB, BE, y

gōnon se omita. En español es necesario incluirla. La pongo entre paréntesis cuando no aparece en el texto griego.

[69] Expresión algebraica: $(a+b)a = ab + a^2$.

ΗΓ es igual a ΒΓ; pero ΑΔ es el (rectángulo comprendido) por ΑΓ, ΓΒ: porque ΔΓ es igual a ΓΒ; y ΔΒ es el cuadrado de ΓΒ; así pues, el rectángulo comprendido por ΑΒ, ΒΓ es igual al rectángulo comprendido por ΑΓ, ΓΒ junto con el cuadrado de ΒΓ.

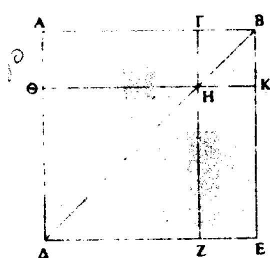
Por consiguiente, si se corta al azar una línea recta, el rectángulo comprendido por la recta entera y uno de los segmentos es igual al rectángulo comprendido por los segmentos y el cuadrado del segmento primeramente dicho. Q. E. D.

Proposición 4

Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la (recta) entera es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos [70].

Córtese, pues, al azar la línea ΑΒ en el (punto) Γ.

Digo que el cuadrado de ΑΒ es igual a los cuadrados de ΑΓ, ΓΒ y dos veces el rectángulo comprendido por ΑΓ, ΓΒ.



Pues constrúyase a partir de ΑΒ el cuadrado ΑΔΕΒ [I, 46], y trácese ΒΔ, y por el (punto) Γ trácese ΓΖ paralela a una de las dos (rectas) ΑΔ, ΕΒ, y por el (punto) Η trácese ΘΚ paralela a las dos (rectas) ΑΒ, ΔΕ [I, 31]. Ahora bien, como ΓΖ es paralela a ΑΔ, y ΒΔ ha incidido sobre ellas, el ángulo externo ΓΗΒ es igual al interno y opuesto ΑΔΒ [I, 29]. Pero el (ángulo) ΑΔΒ es igual al (ángulo)

[70] La expresión algebraica de este teorema es: $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

ΑΒΔ, puesto que el lado ΒΑ es también igual al (lado) ΑΔ [I, 5]; por tanto, el ángulo ΓΗΒ es también igual al (ángulo) ΗΒΓ; de modo que el lado ΒΓ es también igual al lado ΓΗ [I, 6]; pero ΓΒ es igual a ΗΚ y ΓΗ a ΚΒ [I, 34]; por tanto, ΗΚ es también igual a ΚΒ; luego ΓΗΚΒ es equilátero.

Digo, en fin, que también es rectangular. Pues como ΓΗ es paralela a ΒΚ [y ΓΒ ha incidido sobre ellas], entonces los ángulos ΚΒΓ, ΗΓΒ son iguales a dos rectos [I, 29]. Pero el (ángulo) ΚΒΓ es recto; por tanto, el (ángulo) ΒΓΗ es también recto; de modo que los (ángulos) opuestos ΓΗΚ, ΗΚΒ son, asimismo, rectos [I, 34]. Luego ΓΗΚΒ es rectangular; pero se ha demostrado que también es equilátero; por tanto, es un cuadrado; y es el (cuadrado) de ΓΒ. Por lo mismo, efectivamente ΘΖ es también un cuadrado; y es el (cuadrado) de ΘΗ, es decir de ΑΓ [I, 34]; por tanto, ΘΖ, ΚΓ son los (cuadrados) de ΑΓ, ΓΒ. Y como ΑΗ es igual a ΗΕ y ΑΗ es el (rectángulo comprendido) por ΑΓ, ΓΒ: porque ΗΓ es igual a ΓΒ; entonces ΗΕ es también igual al (rectángulo comprendido) por ΑΓ, ΓΒ; por tanto, ΑΗ, ΗΕ son iguales a dos veces el (rectángulo comprendido) por ΑΓ, ΓΒ. Pero ΘΖ, ΓΚ son también los cuadrados de ΑΓ, ΓΒ; por tanto, los cuatro ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ son iguales a los cuadrados de ΑΓ, ΓΒ y dos veces el rectángulo comprendido por ΑΓ, ΓΒ. Ahora bien, ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ son el (cuadrado) entero ΑΔΕΒ, que es el cuadrado de ΑΒ; por tanto, el cuadrado de ΑΒ es igual a los cuadrados de ΑΓ, ΓΒ y dos veces el rectángulo comprendido por ΑΓ, ΓΒ.

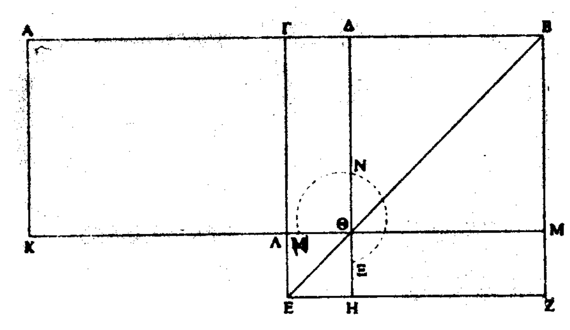
Por consiguiente, si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la (recta) entera es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos. Q. E. D.

[Porisma:
A partir de esto, queda claro que en las áreas de cuadrados, los paralelogramos situados en torno a la diagonal son cuadrados] [71].

Proposición 5

Si se corta una línea recta en (segmentos) iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por los segmentos desiguales de la (recta) entera junto con el cuadrado de la (recta que está) entre los puntos de sección [72], *es igual al cuadrado de la mitad* [73].

Córtese, pues, una recta cualquiera AB en (segmentos) iguales en el punto Γ, y en (segmentos) desiguales en el (punto) Δ.



Digo que el rectángulo comprendido por AΔ, ΔB junto con el cuadrado de ΓΔ es igual al cuadrado de ΓB.

[71] Este porisma es, sin duda, una interpolación, como ha probado Heiberg en «Paralipomena zu Euklid», *Hermes* 38 (1905), 48.

[72] *Toû apò tês metaxù tôn tómon tetragónou.* No es posible una traducción literal al español. Se refiere, sin duda, a la recta que está entre los puntos de sección.

[73] Expresión algebraica: $ab + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

Pues constrúyase a partir de ΓB el cuadrado ΓEZB [I, 46], y trácese BE, y por el (punto) Δ trácese ΔH paralela a una de las dos (rectas) ΓE, BZ, y por el (punto) Θ trácese a su vez KM paralela a una de las dos (rectas) AB, EZ, y por el (punto) A trácese, asimismo, AK paralela a una de las dos (rectas) ΓΛ, BM [I, 31]. Y como el complemento ΓΘ es igual al complemento ΘZ [I, 43], añádase a ambos ΔM; por tanto, el (rectángulo) entero ΓM es igual al rectángulo entero ΔZ. Pero el (rectángulo) ΓM es igual al (rectángulo) AΛ, puesto que la (recta) AΓ es igual a la (recta) ΓB [I, 36]; por tanto, el (rectángulo) AΛ es también igual al (rectángulo) ΔZ. Añádase a ambos ΓΘ; entonces el (rectángulo) entero AΘ es igual al gnomon MNΞ [74]. Pero AΘ es el (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB: porque ΔΘ es igual a ΔB; entonces el gnomon MNΞ es igual al (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB. Añádase a ambos ΛH, que es igual al cuadrado de ΓΔ; entonces el gnomon MNΞ y ΛH es igual al rectángulo comprendido por AΔ, ΔB y el cuadrado de ΓΔ. Ahora bien, el gnomon MNΞ y ΛH es el cuadrado entero ΓEZB, que es el cuadrado de ΓB; por tanto, el rectángulo comprendido por AΔ, ΔB junto con el cuadrado de ΓΔ es igual al cuadrado de ΓB.

Por consiguiente, si se corta una línea recta en (segmentos) iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por los segmentos desiguales de la (recta) entera junto con el cuadrado de la (recta que está) entre los puntos de sección, es igual al cuadrado de la mitad. Q. E. D.

[74] El *gnómon* se señala en el dibujo mediante tres letras y una línea punteada. En el dibujo que acompaña a este teorema, la letra M se utiliza dos veces, una para el extremo de la recta KM y la otra para el interior del gnomon MNΞ.

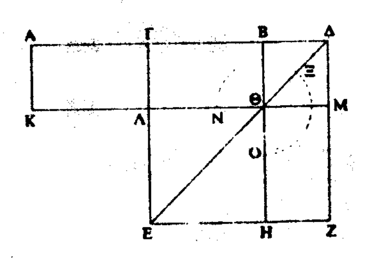
Proposición 6

Si se divide en dos partes iguales una línea recta y se le añade, en línea recta, otra recta, el rectángulo comprendido por la (recta) entera con la (recta) añadida y la (recta) añadida junto con el cuadrado de la mitad es igual al cuadrado de la (recta) compuesta por la mitad y la (recta) añadida [75].

Divídase, pues, la recta AB en dos por el (punto) Γ, y añádasele, en línea recta, otra recta, BΔ.

Digo que el rectángulo comprendido por AΔ, ΔB junto con el cuadrado de ΓB es igual al cuadrado de ΓΔ.

Pues constrúyase a partir de ΓΔ el cuadrado ΓEZΔ [I, 46], y trácese ΔE, y por el punto B trácese BH paralela a una de las dos (rectas) EΓ, ΔZ, y por el punto Θ trácese KM paralela a una de las dos (rectas) AB, EZ, y además por el (punto) A trácese AK paralela a una de las dos (rectas) ΓΛ, ΔM [I, 31].



Entonces, como AΓ es igual a ΓB, también el (rectángulo) AΛ es igual al ΓΘ [I, 36]. Pero el (rectángulo) ΓΘ es igual al ΘZ [I, 43]. Por tanto, el (rectángulo) AΛ es también igual al ΘZ. Añádase a ambos el (rectángulo) ΓM; entonces el (rectángulo) entero AM es igual al gnomon NΞO. Pero AM es el (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB: porque ΔM es igual a ΔB; por tanto, el gnomon NΞO es también igual al [rectángulo comprendido] por AΔ, ΔB. Añádase a ambos ΛH, que es igual al cuadrado de BΓ; entonces el rectángulo comprendido por AΔ, ΔB junto con el cuadrado de ΓB es igual al gnomon NΞO y ΛH. Pero el gnomon NΞO y ΛH son el cuadrado entero ΓEZΔ, que es el cuadrado de ΓΔ; por tanto, el rectángulo comprendido por AΔ, ΔB junto con el cuadrado de ΓB es igual al cuadrado de ΓΔ.

[75] Expresión algebraica: $(2a + b)b + a^2 = (a + b)^2$.

Por consiguiente, si se divide en dos una línea recta y se le añade, en línea recta, otra recta, el rectángulo comprendido por la (recta) entera con la (recta) añadida y la (recta) añadida junto con el cuadrado de la mitad es igual al cuadrado de la (recta) compuesta a partir de la mitad y la (recta) añadida. Q. E. D.

Proposición 7

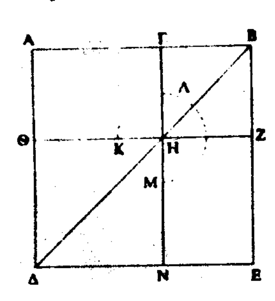
Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la (recta) entera y el de uno de los segmentos tomados conjuntamente son iguales a dos veces el rectángulo comprendido por la (recta) entera y el segmento antedicho más el cuadrado del segmento restante [76].

Córtese, pues, al azar una recta AB por el punto Γ.

Digo que los cuadrados de AB, BΓ son iguales a dos veces el rectángulo comprendido por AB, BΓ más el cuadrado de ΓA.

[76] Expresión algebraica: $(a + b)^2 + a^2 = 2(a + b)a + b^2$.

Pues constrúyase a partir de AB el cuadrado AΔEB [I, 46]; e inscríbase la figura [77].



Así pues, como el (rectángulo) AH es igual al HE [I, 43], añádase a ambos ΓZ; entonces el (rectángulo) entero AZ es igual al (rectángulo) entero ΓE; por tanto, los (rectángulos) AZ, ΓE son el doble de AZ. Pero los (rectángulos) AZ, ΓE son el gnomon KΛM más el cuadrado ΓZ; por tanto, el gnomon KΛM y ΓZ son el doble de AZ. Ahora bien, el doble de AZ es también dos veces el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ, porque BZ es igual a BΓ; por tanto, el gnomon KΛM y el cuadrado ΓZ son iguales a dos veces el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ. Añádase a ambos ΔH, que es el cuadrado de AΓ; entonces el gnomon KΛM y los cuadrados BH, HΔ son iguales a dos veces el rectángulo comprendido por AB, BΓ y el cuadrado de AΓ. Pero el gnomon KΛM y los cuadrados BH, HΔ son el cuadrado entero AΔEB y el (cuadrado) ΓZ, que son los cuadrados de AB, BΓ; por tanto, los cuadrados de AB, BΓ son iguales a dos veces el rectángulo comprendido por AB, BΓ junto con el cuadrado de AΓ.

Por consiguiente, si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la (recta) entera y el de uno de los segmentos tomados conjuntamente son iguales a dos veces el rectángulo comprendido por la (recta) entera y el segmento antedicho más el cuadrado del segmento restante. Q. E. D.

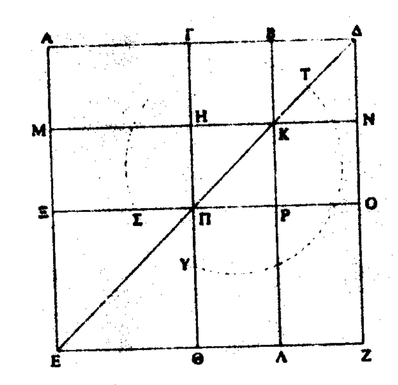
[77] Conforme al método empleado en proposiciones anteriores.

Proposición 8

Si se corta al azar una línea recta, cuatro veces el rectángulo comprendido por la (recta) entera y uno de los segmentos junto con el cuadrado del segmento restante es igual al cuadrado construido a partir de la (recta) entera y del segmento primeramente dicho, tomados como una sola recta [78].

Córtese, pues, al azar una recta AB por el punto Γ. Digo que cuatro veces el rectángulo comprendido por AB, BΓ junto con el cuadrado de AΓ es igual al cuadrado construido a partir de AB, BΓ tomados como una sola recta.

Pues prolónguese BΔ en línea recta [con la recta AB], y hágase BΔ igual a ΓB, y constrúyase a partir de AΔ el cuadrado AEZΔ [I, 46], e inscríbase la figura duplicada.



Así pues, como ΓB es igual a BΔ, mientras que ΓB es igual a HK, y BΔ a KN, entonces HK es también igual a

[78] Expresión algebraica: $4(a+b)a+b^2 = [(a+b)+a]^2$.

KN. Por lo mismo, ΠΡ también es igual a ΡΟ. Y como ΒΓ es igual a ΒΔ y ΗΚ a ΚΝ, entonces el (cuadrado) ΓΚ es también igual al (cuadrado) ΚΔ, y el (cuadrado) ΗΡ al ΡΝ [I, 36]. Pero ΓΚ es igual a ΡΝ: porque son complementos del paralelogramo ΓΟ [I, 43]; por tanto, el (cuadrado) ΚΔ es también igual al (cuadrado) ΗΡ; luego los cuatro ΔΚ, ΓΚ, ΗΡ, ΡΝ son iguales entre sí. Por tanto, los cuatro son el cuádruple de ΓΚ. Como ΓΒ es a su vez igual a ΒΔ, mientras que ΒΔ es igual a ΒΚ, es decir a ΓΗ, pero ΓΒ es igual a ΗΚ, es decir a ΗΠ, entonces ΓΗ es también igual a ΗΠ. Y como ΓΗ es igual a ΗΠ, y ΠΡ a ΡΟ, el (rectángulo) ΑΗ es también igual al (rectángulo) ΜΠ, y el (rectángulo) ΠΛ al (rectángulo) ΡΖ [I, 36]. Pero el (rectángulo) ΜΠ es igual al (rectángulo) ΠΛ: porque son complementos del paralelogramo ΜΛ [I, 43]; por tanto, el (rectángulo) ΑΗ es igual al (rectángulo) ΡΖ; luego los cuatro ΑΗ, ΜΠ, ΠΛ, ΡΖ son iguales entre sí; por tanto, los cuatro son el cuádruple de ΑΗ. Ahora bien, se ha demostrado que los cuatro ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΡΝ son también el cuádruple de ΓΚ; por tanto, los ocho que comprenden el gnomon ΣΤΥ son el cuádruple de ΑΚ. Y como ΑΚ es el (rectángulo comprendido) por ΑΒ, ΒΔ: porque ΒΚ es igual a ΒΔ; entonces cuatro veces el (rectángulo comprendido) por ΑΒ, ΒΔ es el cuádruple de ΑΚ. Pero se ha demostrado que el gnomon ΣΤΥ es también el cuádruple de ΑΚ; por tanto, cuatro veces el (rectángulo comprendido) por ΑΒ, ΒΔ es igual al gnomon ΣΤΥ. Añádase a ambos ΞΘ, que es igual al cuadrado de ΑΓ; entonces cuatro veces el rectángulo comprendido por ΑΒ, ΒΔ junto con el cuadrado de ΑΓ es igual al gnomon ΣΤΥ y el (cuadrado) ΞΘ. Pero el gnomon ΣΤΥ y el (cuadrado) ΞΘ son el cuadrado entero ΑΕΖΔ, que es el (cuadrado) de ΑΔ; luego cuatro veces el (rectángulo comprendido) por ΑΒ, ΒΔ junto con el (cuadrado) de ΑΓ es igual al cuadrado de ΑΔ; ahora bien, ΒΔ es igual a ΒΓ. Por tanto, cuatro veces el rectángulo comprendido por ΑΒ, ΒΓ junto con el cuadrado de ΑΓ es igual al (cuadrado) de ΑΔ, es decir al (cuadrado) construido a partir de ΑΒ y ΒΓ tomados como una sola (recta).

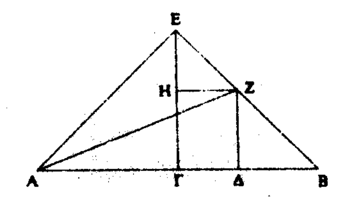
Por consiguiente, si se corta al azar una línea recta, cuatro veces el rectángulo comprendido por la (recta) entera y uno de los segmentos junto con el cuadrado del segmento restante es igual al cuadrado construido a partir de la (recta) entera y el segmento primeramente dicho tomados como una sola (recta). Q. E. D.

Proposición 9

Si se corta una línea recta en partes iguales y desiguales, los cuadrados de los segmentos desiguales de la (recta) entera son el doble del cuadrado de la mitad más el cuadrado de la (recta situada) entre los (puntos) de sección [79].

Córtese, pues, una (recta) ΑΒ en (segmentos) iguales por el (punto) Γ, y en desiguales por el (punto) Δ.

Digo que los cuadrados de ΑΔ, ΔΒ son el doble de los cuadrados de ΑΓ, ΓΔ.



Trácese, pues, por el (punto) Γ la (recta) ΓΕ que forme ángulos rectos con ΑΒ, y hágase ΓΕ igual a cada una de

[79] Expresion algebraica: $a^2 + b^2 = 2 \left[\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - b \right) \right]$

las (rectas) ΑΓ, ΓΒ, y trácense ΕΑ, ΕΒ, y por el (punto) Δ trácese ΔΖ paralela a ΕΓ, y por el (punto) Ζ, ΖΗ (paralela) a ΑΒ, y trácese ΑΖ.

Y como ΑΓ es igual a ΓΕ, el (ángulo) ΕΑΓ es igual al (ángulo) ΑΕΓ. Y como es recto el ángulo correspondiente a Γ, entonces los (ángulos) restantes ΕΑΓ, ΑΕΓ son iguales a un recto [I, 32]; y son iguales; por tanto, cada uno de los (ángulos) ΓΕΑ, ΓΑΕ son la mitad de un recto. Por lo mismo, en efecto, cada uno de los ángulos ΓΕΒ, ΕΒΓ es también la mitad de un recto; por tanto, el (ángulo) entero ΑΕΒ es recto. Y como el (ángulo) ΗΕΖ es la mitad de un recto y el (ángulo) ΕΗΖ es recto —porque es igual al interno y opuesto ΕΓΒ [I, 29]— entonces el (ángulo) restante ΕΖΗ es la mitad de un recto [I, 32]; por tanto, el ángulo ΗΕΖ es igual al (ángulo) ΕΖΗ; de modo que el lado ΕΗ también es igual al (lado) ΗΖ [I, 6]. Como, asimismo, el ángulo correspondiente a Β es la mitad de un recto, y el (ángulo) ΖΔΒ es recto: porque es a su vez igual al interno y opuesto ΕΓΒ [I, 29]; entonces el (ángulo) restante ΒΖΔ es la mitad de un recto [I, 32]; luego el (ángulo) correspondiente a Β es igual al (ángulo) ΔΖΒ; de modo que también el lado ΖΔ es igual al lado ΔΒ [I, 6]. Y como ΑΓ es igual a ΓΕ, el (cuadrado) de ΑΓ también es igual al de ΓΕ; por tanto, los cuadrados de ΑΓ, ΓΕ son el doble del de ΑΓ. Pero el cuadrado de ΕΑ es igual a los de ΑΓ, ΓΕ —porque el ángulo ΑΓΕ es recto [I, 47]— por tanto, el (cuadrado) de ΕΑ es el doble del de ΑΓ. Como ΕΗ es a su vez igual a ΗΖ, el cuadrado de ΕΗ es también igual al (cuadrado) de ΗΖ; entonces los cuadrados de ΕΗ, ΗΖ son el doble del cuadrado de ΗΖ. Pero el cuadrado de ΕΖ es igual a los cuadrados de ΕΗ, ΗΖ; por tanto, el cuadrado de ΕΖ es el doble del de ΗΖ. Pero ΗΖ es igual a ΓΔ [I, 34]; por tanto, el (cuadrado) de ΕΖ es el doble del (cuadrado) de ΓΔ. Pero el (cuadrado) de ΕΑ es también el doble del de ΑΓ; por tanto, los cuadrados de ΑΕ, ΕΖ son el doble de los cuadrados de ΑΓ, ΓΔ. Pero el cuadrado de ΑΖ es igual a los cuadrados de ΑΕ, ΕΖ: porque el ángulo ΑΕΖ es recto [I, 47]; por tanto, el cuadrado de ΑΖ es el doble de los (cuadrados) de ΑΓ, ΓΔ. Ahora bien, los (cuadrados) de ΑΔ, ΔΖ son iguales al (cuadrado) de ΑΖ: porque el ángulo correspondiente a Δ es recto [I, 47]; luego los (cuadrados) de ΑΔ, ΔΖ son el doble de los cuadrados de ΑΓ, ΓΔ. Pero ΔΖ es igual a ΔΒ; por tanto, los cuadrados de ΑΔ, ΔΒ son el doble de los cuadrados de ΑΓ, ΓΔ.

Por consiguiente, si se corta una línea recta en partes iguales y desiguales, los cuadrados de los segmentos desiguales de la (recta) entera son el doble del cuadrado de la mitad y el cuadrado de la (recta situada) entre los (puntos) de sección. Q. E. D.

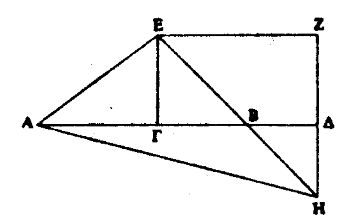
Proposición 10

Si se divide en dos partes iguales una línea recta y se le añade, en línea recta, otra recta, el cuadrado de la (recta) entera con la (recta) añadida y el (cuadrado) de la añadida, tomados conjuntamente, son el doble del (cuadrado) de la mitad y el cuadrado construido a partir de la (recta) compuesta por la mitad y la (recta) añadida, tomadas como una sola recta [80].

Divídase, pues, en dos partes iguales una recta ΑΒ por el (punto) Γ, y añádase a ella, en línea recta, otra recta ΒΔ.

[80] Expresión algebraica: $(2a+b)^2 + b^2 = 2[a^2 + (a+b)^2]$.

Digo que los cuadrados de AΔ, ΔB son el doble de los cuadrados de AΓ, ΓΔ.



Pues trácese a partir del punto Γ la (recta) ΓE que forme ángulos rectos con AB [I, 11], y hágase igual a cada una de las (rectas) AΓ, ΓB [I, 3], y trácense EA, EB; y por el (punto) E trácese EZ paralela a AΔ, y por el (punto) Δ trácese ZΔ paralela a ΓE [I, 31]. Y dado que una recta EZ ha incidido sobre las rectas paralelas EΓ, ZΔ, entonces los (ángulos) ΓEZ, EZΔ son iguales a dos rectos [I, 29]; por tanto, los (ángulos) ZEB, EZΔ son menores que dos rectos; pero las rectas prolongadas a partir de (ángulos) menores que dos rectos se encuentran [I, Post. 5]; por tanto, las (rectas) EB, ZΔ prolongadas en el sentido de B, Δ se encontrarán. Prolónguense y encuéntrense en H, y trácese AH. Y como AΓ es igual a ΓE, el ángulo EAΓ es también igual al (ángulo) AEΓ [I, 5], y el ángulo correspondiente a Γ es recto; por tanto, cada uno de los (ángulos) EAΓ, AEΓ es la mitad de un recto [I, 32]. Por lo mismo, cada uno de los (ángulos) ΓEB, EBΓ es la mitad de un recto; por tanto, el (ángulo) AEB es recto. Y como el (ángulo) EBΓ es la mitad de un recto, entonces ΔBH es también la mitad de un recto [I, 15]. Pero el (ángulo) BΔH es también recto: pues es igual al (ángulo) ΔΓE, porque son alternos [I, 29]; por tanto, el ángulo restante ΔHB es la mitad de un recto [I, 32]: luego el ángulo ΔHB es igual al (ángulo) ΔBH; de modo que el lado BΔ es también igual al lado HΔ [I, 6]. Como a su vez el ángulo EHZ es la mitad de un recto, y el (ángulo) correspondiente a Z es recto —porque es igual al (ángulo) opuesto, el correspondiente a Γ [I, 34]— entonces el ángulo restante ZEH es la mitad de un recto [I, 32]; por tanto, el ángulo EHZ es igual al (ángulo) ZEH; de modo que también el lado HZ es igual al lado EZ [I, 6]. Ahora bien, dado que el cuadrado de EΓ es igual al cuadrado de ΓA, entonces los cuadrados de EΓ, ΓA son el doble del cuadrado de ΓA. Pero el (cuadrado) de EA es igual a los (cuadrados) de EΓ, ΓA [I, 47]; por tanto, el cuadrado de EA es el doble del cuadrado de AΓ [N. C. 1]. Como ZH es a su vez igual a EZ, el (cuadrado) de ZH es también igual al de ZE, entonces los (cuadrados) de HZ, ZE son el doble del (cuadrado) de EZ. Pero el (cuadrado) de EH es igual a los (cuadrados) de HZ, ZE [I, 47]; por tanto, el (cuadrado) de EH es el doble del (cuadrado) de EZ. Y EZ es igual a ΓΔ [I, 34]; por tanto, el (cuadrado) de EH es el doble del de ΓΔ. Ahora bien, se ha demostrado que el (cuadrado) de EA es también el doble del de AΓ; por tanto, los cuadrados de AE, EH son el doble de los cuadrados de AΓ, ΓΔ. Pero el (cuadrado) de AH es igual a los (cuadrados) de AE, EH [I, 47]; por tanto, el (cuadrado) de AH es el doble de los (cuadrados) de AΓ, ΓΔ. Pero los (cuadrados) de AΔ, ΔH son iguales al cuadrado de AH [I, 47]; por tanto, los (cuadrados) de AΔ, ΔH son el doble de los (cuadrados) de AΓ, ΓΔ. Pero ΔH es igual a ΔB; luego los (cuadrados) de AΔ, ΔB son el doble de los cuadrados de AΓ, ΓΔ.

Por consiguiente, si se divide en dos partes iguales una línea recta, y se le añade, en línea recta, otra recta, el cuadrado de la (recta) entera con la añadida y el cuadrado de la añadida, tomados conjuntamente, son el doble del

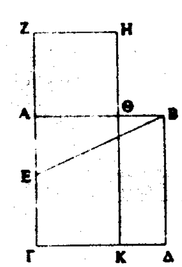
cuadrado de la mitad y el cuadrado construido a partir de la recta compuesta por la mitad y la añadida, tomadas como una sola recta. Q. E. D.

Proposición 11

Dividir una recta dada de manera que el rectángulo comprendido por la (recta) entera y uno de los segmentos sea igual al cuadrado del segmento restante.

Sea AB la recta dada.

Así pues, hay que dividir AB de modo que el rectángulo comprendido por la (recta) entera y uno de los segmentos sea igual al cuadrado del segmento restante.



Pues constrúyase a partir de AB el cuadrado ABΔΓ [I, 46] y divídase en dos AΓ por el punto E y trácese BE y prolónguese ΓA hasta Z, y hágase EZ igual a BE, y constrúyase a partir de AZ el cuadrado ZΘ, y prolónguese HΘ hasta K.

Digo que AB ha sido cortada en Θ, de modo que hace el rectángulo comprendido por AB, BΘ igual al cuadrado AΘ.

Pues como la recta AΓ ha sido dividida en dos por el (punto) E y se le ha añadido ZA, entonces el rectángulo comprendido por ΓZ, ZA junto con el cuadrado de AE es igual al cuadrado de EZ [II, 6]. Pero EZ es igual a EB; por tanto, el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZA junto con el (cuadrado) de AE es igual al cuadrado de EB. Pero los (cuadrados) de BA, AE son iguales al (cuadrado) de EB, porque el ángulo correspondiente a A es recto [I, 47]; por tanto, el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZA junto con el (cuadrado) de AE es igual a los cuadrados de BA, AE. Quítese de ambos el (cuadrado) de AE; entonces el rectángulo restante comprendido por ΓZ, ZA es igual al (cuadrado) de AB. Ahora bien, el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZA es ZK: porque AZ es igual a ZH; pero el cuadrado de AB es AΔ; por tanto, ZK es igual a AΔ. Quítese de ambos AK; entonces el (cuadrado) restante ZΘ es igual a ΘΔ. Y ΘΔ es el (rectángulo comprendido) por AB, BΘ: porque AB es igual a BΔ; pero ZΘ es el cuadrado de AΘ; por tanto, el rectángulo comprendido por AB, BΘ es igual al cuadrado de ΘA.

Por consiguiente, la recta dada AB ha sido dividida en Θ de modo que hace el rectángulo comprendido por AB, BΘ igual al cuadrado de ΘA. Q. E. F.

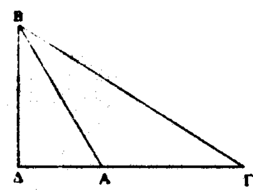
Proposición 12

En los triángulos obtusángulos el cuadrado del lado que subtiende al ángulo obtuso es mayor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo obtuso en dos veces el rectángulo comprendido por un (lado) de los del ángulo obtuso sobre el que cae la perpendicular y la (recta) exterior cortada por la perpendicular, hasta el ángulo obtuso [81].

Sea ABΓ el triángulo obtusángulo que tiene el (ángulo) obtuso BAΓ, y trácese a partir del punto B, BΔ perpendicular a ΓA prolongada.

[81] Una versión más libre y llana sería: «y su segmento exterior desde el punto de corte con la perpendicular hasta el ángulo obtuso». Esta referencia al segmento (exterior o interior) desde el punto de corte puede extenderse a los demás casos en que aparece la misma expresión.

Digo que el cuadrado de BΓ es mayor que los cuadrados de BA, AΓ en dos veces el rectángulo comprendido por ΓA, AΔ.



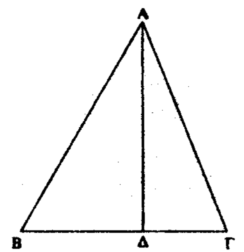
Pues dado que la recta ΓA ha sido cortada al azar en el punto A, entonces el (cuadrado) de ΔΓ es igual a los cuadrados de ΓA, AΔ y dos veces el (rectángulo comprendido) por ΓA, AΔ [II, 4]. Añádase a ambos el cuadrado de ΔB; entonces los (cuadrados) de ΓΔ, ΔB son iguales a los cuadrados de ΓA, AΔ, ΔB y dos veces el [rectángulo comprendido] por ΓA, AΔ. Pero el (cuadrado) de ΓB es igual a los (cuadrados) de ΓΔ, ΔB: porque el ángulo correspondiente a Δ es recto [I, 47]. Pero el cuadrado de AB es igual a los (cuadrados) de AΔ, ΔB [I, 47]; por tanto, el cuadrado de ΓB es igual a los cuadrados de ΓA, AB y dos veces el rectángulo comprendido por ΓA, AΔ; de modo que el cuadrado de ΓB es mayor que los cuadrados de ΓA, AB es dos veces el rectángulo comprendido por ΓA, AΔ.

Por consiguiente, en los triángulos obtusángulos el cuadrado del lado que subtiende al ángulo obtuso es mayor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo obtuso en dos veces el rectángulo comprendido por un (lado) de los del ángulo obtuso sobre el que cae la perpendicular y la (recta) exterior cortada por la perpendicular hasta el ángulo obtuso. Q. E. D.

Proposición 13

En los triángulos acutángulos, el cuadrado del lado que subtiende al ángulo agudo es menor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo agudo en dos veces el rectángulo comprendido por uno de los lados del ángulo agudo sobre el que cae la perpendicular y la (recta) interior cortada por la perpendicular hasta el ángulo agudo.

Sea ABΓ el triángulo acutángulo que tiene agudo el ángulo correspondiente a B, y trácese a partir del punto A, AΔ perpendicular a BΓ.



Digo que el cuadrado de AΓ es menor que los cuadrados de ΓB, BA en dos veces el rectángulo comprendido por ΓB, BΔ.

Pues dado que ΓB ha sido cortada al azar en Δ, entonces los cuadrados de ΓB, BΔ son iguales a dos veces el rectángulo comprendido por ΓB, BΔ y el cuadrado de ΔΓ [II, 7]. Añádase a ambos el (cuadrado) de ΔA; entonces los cuadrados de ΓB, BΔ, ΔA son iguales a dos veces el rectángulo comprendido por ΓB, BΔ y los cuadrados de AΔ, ΔΓ. Pero el cuadrado de AB es igual a los (cuadrados) de BΔ, ΔA: porque el ángulo correspondiente a Δ es recto [I, 47]; pero el (cuadrado) de AΓ es igual a los (cuadrados) de AΔ, ΔΓ; por tanto los cuadrados de ΓB, BA son iguales al cuadrado de AΓ y dos veces el (rectángulo comprendido) por ΓB, BΔ; de modo que el cuadrado de AΓ sólo es menor que los cuadrados de ΓB, BA en dos veces el rectángulo comprendido por ΓB, BΔ.

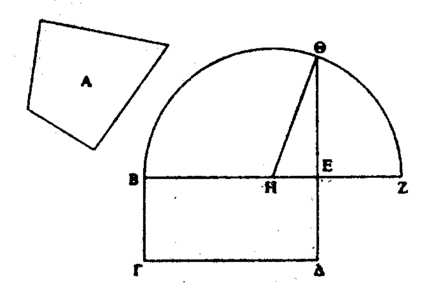
Por consiguiente, en los triángulos acutángulos, el lado que subtiende el ángulo agudo es menor que los lados que comprenden el ángulo agudo en dos veces el rectángulo comprendido por uno de los lados del ángulo agudo sobre el que cae la perpendicular y la (recta) interior cortada por la perpendicular hasta el ángulo agudo. Q. E. D.

Proposición 14

Construir un cuadrado igual a una figura rectilínea dada.

Sea A la figura rectilínea dada.

Así pues, hay que construir un cuadrado igual a la figura rectilínea A.



Constrúyase, pues, el paralelogramo rectángulo BΔ igual a la figura rectilínea A [I, 45]. Entonces, si BE es igual a EΔ, se habrá hecho lo propuesto: porque se ha construido el cuadrado BΔ igual a la figura rectilínea A; pero si no, una de las (rectas) BE, EΔ es mayor. Sea mayor BE y prolónguese hasta Z, y hágase EZ igual a EΔ, y divídase en dos partes iguales BZ en H, y con el centro H y una de

las (rectas) HB, HZ como distancia descríbase el semicírculo BΘZ, y prolónguese ΔE hasta Θ, y trácese HΘ.

Así pues, como la recta BZ ha sido cortada en partes iguales en H y en desiguales en E, entonces el rectángulo comprendido por BE, EZ junto con el cuadrado de EH es igual al cuadrado de HZ [II, 5]. Pero HZ es igual a HΘ; por tanto, el (rectángulo comprendido) por BE, EZ junto con el (cuadrado) de HE es igual al (cuadrado) de HΘ. Pero los cuadrados de ΘE, EH son iguales al (cuadrado) de HΘ [I, 47]; por tanto, el (rectángulo comprendido) por BE, EZ junto con el (cuadrado) de HE es igual a los (cuadrados) de ΘE, EH. Quítese de ambos el cuadrado de HE; entonces el rectángulo restante comprendido por BE, EZ es igual al cuadrado de EΘ. Ahora bien, el (rectángulo comprendido) por BE, EZ es BΔ: porque EZ es igual a EΔ; por tanto, el paralelogramo BΔ es igual al cuadrado de ΘE. Pero BΔ es igual a la figura rectilínea A. Luego A es igual al cuadrado que puede formarse a partir de EΘ.

Por consiguiente, se ha construido un cuadrado, el que puede formarse a partir de EΘ, igual a la figura rectilínea dada A. Q. E. F.

LIBRO TERCERO

DEFINICIONES

1. Círculos iguales son aquellos cuyos diámetros son iguales, o cuyos radios son iguales [82].
2. Se dice que es tangente [83] a un círculo la recta que, tocando el círculo y siendo prolongada, no corta el círculo.

---

[82] Los griegos no contaban con una palabra específica para «radio», utilizaban la expresión: *he ek toû kéntrou (eutheîa)* «la recta trazada a partir del centro». Dice Simson: «Ésta no es definición sino teorema de patente verdad; porque colocados los círculos, cuyos radios son iguales, uno sobre otro, de tal suerte que ajusten sus centros, ajustarán también los mismos círculos». *Los seis primeros libros y el undécimo y duodécimo de los Elementos...*, ed. cit., pág. 59.

[83] Los geómetras griegos establecen por lo general una distinción entre *háptesthai* y *epháptesthai*, utilizando el primero en el sentido de «encontrarse» y el último con el significado de «tocarse, ser tangente». Se trata de un uso regular, aunque no observado siempre por el propio Euclides en los *Elementos*, quien, por ejemplo, en IV, Def. 5 utiliza *háptesthai* en el sentido de «tocar». Así lo hace también Arquímedes en alguna ocasión. Por otra parte, Aristóteles usa *epháptesthai* en ciertos casos en los que se esperaría *háptesthai (Meteorológica* III 5, 376b9 y 376a6). En suma, al no tener el uso técnico establecido de nuestro «ser tangente» mantendré por lo regular la versión «tocar».

3. Se dice que son tangentes entre sí los círculos que, tocándose mutuamente, no se cortan.
4. En un círculo se dice que las rectas están a la misma distancia del centro, cuando las perpendiculares trazadas desde el centro hasta ellas son iguales.
5. Se dice que está a mayor distancia aquella (recta) sobre la que cae la perpendicular mayor.
6. Un segmento de un círculo es la figura comprendida por una recta y una circunferencia [84] de un círculo.
7. Un ángulo de un segmento es el comprendido por una recta y una circunferencia de un círculo.
8. Ángulo en un segmento es el ángulo que, cuando se toma un punto sobre la circunferencia del segmento y se trazan rectas desde él hasta los extremos de la recta que es la base del segmento, está comprendido por las rectas trazadas.
9. Cuando las rectas que comprenden el ángulo cortan una circunferencia se dice que el ángulo está sobre ella.
10. Un sector [85] de un círculo es la figura que, cuando se construye un ángulo en el centro del círculo, está comprendida por las rectas que comprenden el ángulo y la circunferencia cortada por ellas.

[84] *Periphéreia* (circunferencia) se refiere, en realidad, a un arco de circunferencia muy frecuentemente. Cuando se moderniza esta definición en los términos: «un segmento de un círculo es la figura comprendida por una cuerda y el arco de círculo subtendido por ella», se está traduciendo la versión arábigo-latina de la definición, no la versión euclídea. Siguiendo esta línea, en la definición 8 cabría entender que el ángulo en un segmento es el ángulo inscrito en un arco.

[85] Un escoliasta dice que fue el tranchete de zapatero *(skytotomikós tomeús)* lo que dio lugar al nombre de «sector» del círculo.

11. Son segmentos de círculo semejantes los que admiten ángulos iguales, o aquellos en que los ángulos son iguales entre sí.

Proposición 1

Hallar el centro de un círculo dado.

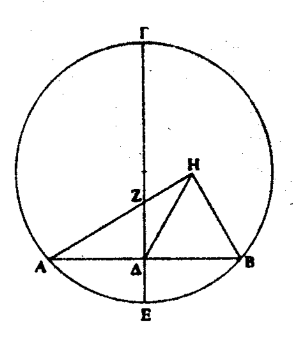
Sea el círculo dado ΑΒΓ.

Hay que hallar el centro del círculo ΑΒΓ.

Trácese en él al azar una recta ΑΒ, y divídase en dos por el punto Δ, y a partir de Δ trácese ΔΓ perpendicular a ΑΒ y prolónguese hasta Ε, y divídase en dos partes iguales ΓΕ en Ζ.

Digo que Ζ es el centro del [círculo] ΑΒΓ.

Pues supongamos que no [86], entonces si es posible sea Η (el centro), y trácense ΗΑ, ΗΔ, ΗΒ. Ahora bien, como ΑΔ es igual a ΔΒ y ΔΗ es común, los dos (lados) ΑΔ, ΔΗ son iguales respectivamente a los dos (lados) ΗΔ, ΔΒ; y la base ΗΑ es igual a la base ΗΒ, pues son radios; por tanto, el ángulo ΑΔΗ es igual al ángulo ΗΔΒ [I, 8]; pero cuando una recta levantada sobre otra recta hace los ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos iguales es recto [I, Def. 10]; por tanto, el ángulo ΗΔΒ es recto. Pero también es recto el ángulo ΖΔΒ; por tanto, el ángulo ΖΔΒ es igual al ángulo ΗΔΒ, el mayor al menor; lo cual es imposible. Luego Η no es el centro del círculo



[86] *Mè gar.*

ABΓ. De la misma manera demostraríamos que ningún otro (lo es) excepto Z.

Por consiguiente, el punto Z es el centro del (círculo) ABΓ.

Porisma:

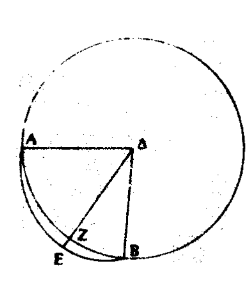
A partir de esto queda claro que si en un círculo una recta divide en dos partes iguales a otra recta formando ángulos rectos, el centro del círculo está sobre la recta que corta. Q. E. F. [87].

Proposición 2

Si se toman dos puntos al azar en la circunferencia de un círculo, la recta que une los dos puntos caerá dentro del círculo.

Sea ABΓ el círculo, y sobre su circunferencia tómense al azar dos puntos A, B.

Digo que la recta trazada desde A hasta B caerá dentro del círculo.



Pues supongamos que no, entonces, si es posible, caiga fuera como AEB, y tómese el centro del círculo ABΓ [III, 1], y sea Δ, y trácense ΔA, ΔB, y prolónguese ΔZE. Así pues, como ΔA es igual a ΔB entonces también el ángulo ΔAE es igual al ángulo ΔBE [I, 5]; y como un lado AEB del triángulo ΔAE ha sido prolongado, entonces el ángulo ΔEB es mayor que el ángulo ΔAE [I, 16]. Pero el (ángulo) ΔAE es igual al (ángulo) ΔBE. Por tanto, el (ángulo) ΔEB es mayor que el (ángulo) ΔBE. Ahora bien, al ángulo mayor lo subtiende el lado mayor [I, 19]; entonces ΔB es mayor que ΔE. Pero ΔB es igual a ΔZ. Por tanto, ΔZ es mayor que ΔE, el menor que el mayor; lo cual es imposible. Entonces la recta trazada de A a B no caerá fuera del círculo. De la misma manera demostraríamos que tampoco (caerá) sobre la misma circunferencia; por tanto (caerá) dentro.

[87] Este porisma se ha introducido entre el problema y la cláusula *hóper édei poiêsai*, que, por supuesto, se refiere al problema.

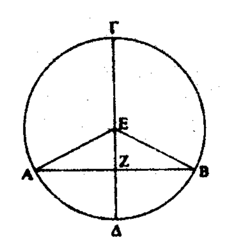
Por consiguiente, si se toman dos puntos al azar en la circunferencia de un círculo, la recta que une los puntos caerá dentro del círculo. Q. E. D.

Proposición 3

Si en un círculo una recta (trazada) a través del centro divide en dos partes iguales a otra recta no (trazada) a través del centro, la corta formando también ángulos rectos; y si la corta formando ángulos rectos, la divide también en dos partes iguales.

Sea ABΓ el círculo, y en él una recta ΓΔ (trazada) a través del centro divida en dos partes iguales a otra recta AB no (trazada) a través del centro, por el punto Z.

Digo que también la corta formando ángulos rectos.



Tómese, pues, el centro del círculo ABΓ y sea E, y trácense EA, EB.

Ahora bien, como AZ es igual a ZB y ZE es común, los dos (lados) son iguales a los dos (lados). Y la base EA es igual a la base EB; por tanto, el (ángulo) AZE es igual al (ángulo) BZE [I, 8]. Pero cuando una recta levantada sobre otra recta hace los

ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos iguales es recto [I, Def. 10]; por tanto, cada uno de los (ángulos) AZE, BZE es recto. Luego ΓΔ (trazada) a través del centro dividiendo en dos partes iguales a AB no (trazada) a través del centro, la corta también formando ángulos rectos.

Pero ahora corte ΓΔ a AB formando ángulos rectos.

Digo que también la divide en dos partes iguales, es decir, que AZ es igual a ZB.

Pues siguiendo la misma construcción, como EA es igual a EB, el ángulo EAZ es también igual al (ángulo) EBZ [I, 5]. Pero el (ángulo) recto AZE es igual al (ángulo) recto BZE; por tanto, EAZ, EZB son dos triángulos que tienen dos ángulos iguales a dos ángulos, y un lado igual a un lado, el común a ambos EZ, que subtiende a uno de los ángulos iguales; luego tendrá también los lados restantes iguales a los lados restantes [I, 26]; así pues, AZ es igual a ZB.

Por consiguiente, si en un círculo una recta (trazada) a través del centro divide en dos partes iguales a otra recta no (trazada) a través del centro, la corta también formando ángulos rectos; y si la corta formando ángulos rectos, la divide también en dos partes iguales. Q. E. D.

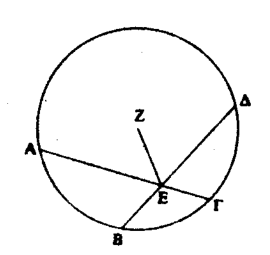
Proposición 4

Si en un círculo se cortan entre sí dos rectas que no pasan por el centro, no se dividen entre sí en dos partes iguales.

Sea ABΓΔ el círculo y en él las dos rectas AΓ, BΔ que no pasan por el centro córtense en el punto E.

Digo que no se dividen entre sí en dos partes iguales.

Pues, si fuera posible, divídanse entre sí en dos partes iguales de modo que AE sea igual a EΓ y BE a EΔ; y tómese el centro del círculo ABΓΔ [III, 1] y sea Z, y trácese ZE.



Así pues, como una recta que pasa por el centro ZE divide en dos a otra recta que no pasa por el centro AΓ, también la corta formando ángulos rectos [III, 3]; por tanto, el (ángulo) ZEA es recto; como, a su vez, una recta ZE divide en dos a otra recta BΔ, también la corta formando ángulos rectos [III, 3]; por tanto, el (ángulo) ZEB es recto. Pero se ha demostrado que también el (ángulo) ZEA es recto; luego el (ángulo) ZEA es igual al (ángulo) ZEB, el menor al mayor; lo cual es imposible. Por tanto, las (rectas) AΓ, BΔ no se dividen entre sí en dos partes iguales.

Por consiguiente, si en un círculo se cortan entre sí dos rectas que no pasan por el centro, no se dividen entre sí en dos partes iguales. Q. E. D.

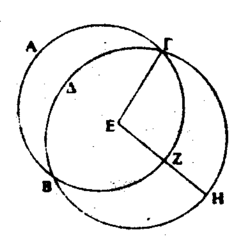
Proposición 5

Si dos círculos se cortan entre sí, su centro no será el mismo.

Córtense, pues, los círculos ABΓ, ΓΔH entre sí en los puntos B, Γ. Digo que su centro no será el mismo.

Pues, si es posible, sea E y trácese EΓ, y trácese al azar EZH. Ahora bien, como el punto E es el centro del círculo

ABΓ, EΓ es igual a EZ [I, Def. 15]. Como, a su vez, el punto E es el centro del círculo ΓΔH, EΓ es igual a EH; pero se ha demostrado que EΓ es igual a EZ; por tanto, EZ también es igual a EH, la menor a la mayor; lo cual es imposible. Por tanto, el punto E no es el centro de los círculos ABΓ, ΓΔH.



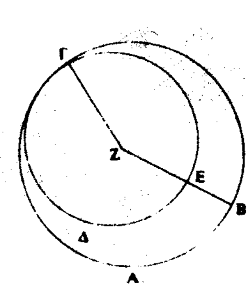
Por consiguiente, si dos círculos se cortan entre sí, su centro no es el mismo. Q. E. D.

Proposición 6

Si dos círculos se tocan uno a otro, su centro no será el mismo.

Tóquense, pues, los dos círculos ABΓ, ΓΔE en el punto Γ. Digo que su centro no será el mismo.

Pues, si fuera posible, sea Z, y trácese ZΓ, y trácese al azar ZEB.



Así pues, como el punto Z es el centro del círculo ABΓ, ZΓ es igual a ZB. Como a su vez el punto Z es el centro del círculo ΓΔE, ZΓ es igual a ZE. Pero se ha demostrado que ZΓ es igual a ZB; por tanto, ZE también es igual a ZB, la menor a la mayor: lo cual es imposible. Por tanto, el punto Z no es el centro de los círculos ABΓ, ΓΔE.

Por consiguiente, si dos círculos se tocan uno a otro, su centro no será el mismo. Q. E. D.

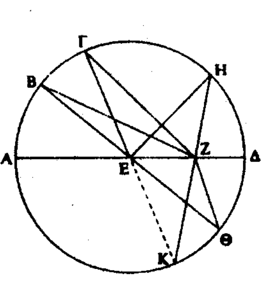
Proposición 7

Si se toma un punto en el diámetro de un círculo que no sea el centro del círculo y desde él hasta el círculo caen algunas rectas, será la mayor aquella en la que está el centro, y la menor la restante y de las demás la más cercana a la que pasa por el centro es siempre mayor que la más lejana, y sólo caerán dos iguales del punto al círculo a uno y otro lado de la más pequeña.

Sea ABΓΔ el círculo, y sea su diámetro AΔ, y tómese sobre AΔ un punto Z, que no sea el centro del círculo, y sea el centro del círculo E, y desde Z hasta el círculo ABΓΔ caigan algunas rectas: ZB, ZΓ, ZH.

Digo que la mayor es ZA, la menor ZΔ, y de las demás ZB mayor que ZΓ, y ZΓ que ZH.

Trácense, pues, BE, ΓE, HE. Y como en todo triángulo dos lados son mayores que el restante [I, 20], entonces los (lados) EB, EZ son mayores que BZ. Pero AE es igual a BE; por tanto, AZ es mayor que BZ. Como BE es a su vez igual a ΓE, y ZE es común, los dos (lados) BE, EZ son iguales a los dos (lados) ΓE, EZ. Ahora bien, el ángulo BEZ también es mayor que el (ángulo) ΓEZ. Luego la base BZ es mayor que la base ΓZ [I, 24]. Por lo mismo, ΓZ es también mayor que ZH.



Como, a su vez, los (lados) HZ, ZE son mayores que EH y EH es igual a EΔ, entonces los (lados) HZ, ZE son mayores que EΔ. Quítese de ambos EZ; entonces el restante HZ es mayor que el restante ZΔ. Por tanto, ZA es la mayor y ZΔ la menor, y ZB es mayor que ZΓ, y ZΓ que ZH.

Digo también que sólo caerán dos rectas iguales del punto Z al círculo ΑΒΓΔ a uno y otro lado de la más pequeña ΖΔ.

Constrúyase, pues, sobre la recta ΕΖ y en su punto Ε el ángulo ΖΕΘ igual al ángulo ΗΕΖ [I, 23] y trácese ΖΘ. Así pues, como ΗΕ es igual a ΕΘ y ΕΖ es común, los dos (lados) ΗΕ, ΕΖ son iguales a los dos (lados) ΘΕ, ΕΖ; y el ángulo ΗΕΖ es igual al ángulo ΘΕΖ; por tanto, la base ΖΗ es igual a la base ΖΘ [I, 4].

Digo, en fin, que no caerá del punto Ζ al círculo otra recta igual a ΖΗ.

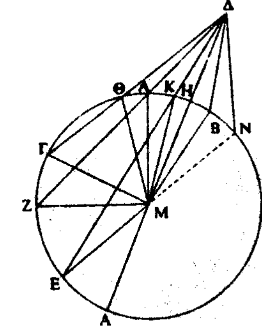
Pues, si fuera posible, caiga ΖΚ. Ahora bien, como ΖΚ es igual a ΖΗ, mientras que ΖΘ [es igual] a ΖΗ, entonces ΖΚ es también igual a ΖΘ, la más cercana a la que pasa por el centro igual a la más lejana: lo cual es imposible. Luego no podrá caer del punto Ζ al círculo otra (recta) igual a ΗΖ. Por tanto sólo una.

Por consiguiente, si se toma un punto en el diámetro de un círculo que no sea el centro del círculo y desde el punto hasta el círculo caen algunas rectas, será la mayor aquella en la que está el centro y la menor la restante, y de las demás la más cercana a la que pasa por el centro es siempre mayor que la más lejana y sólo caerán dos iguales del punto al círculo a uno y otro lado de la más pequeña. Q. E. D.

Proposición 8

Si se toma un punto exterior a un círculo y del punto al círculo se trazan algunas rectas, una de las cuales pasa por el centro y las demás al azar, de las rectas que caen en la parte cóncava de la circunferencia, la mayor es la que pasa por el centro, y de las demás siempre la más cercana a la que pasa por el centro es mayor a la más lejana; pero de las que caen en la parte convexa de la circunferencia la menor es la que está entre el punto y el diámetro, y de las demás la más cercana a la más pequeña es siempre menor que la más lejana, y sólo caerán dos iguales del punto al círculo a uno y otro lado de la más pequeña.

Sea ΑΒΓ el círculo, y tómese un punto Δ exterior a ΑΒΓ, y a partir de él trácense algunas rectas ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, y sea ΔΑ la que pasa por el centro.



Digo que las rectas que caen en la parte cóncava de la circunferencia ΑΕΖΓ, la mayor es ΔΑ, que pasa por el centro, y ΔΕ es mayor que ΔΖ, y ΔΖ que ΔΓ, pero de las rectas que caen en la parte convexa de la circunferencia ΘΛΚΗ, la menor es ΔΗ que está entre el punto y el diámetro ΑΗ, y siempre la más cercana a la menor ΔΗ es menor que la más lejana, ΔΚ (menor que) ΔΛ, y ΔΛ (menor que) ΔΘ.

Tómese, pues, el centro del círculo ΑΒΓ [III, 1] y sea Μ; y trácense ΜΕ, ΜΖ, ΜΓ, ΜΚ, ΜΛ, ΜΘ.

Y como ΑΜ es igual a ΕΜ, añádase a ambas ΜΔ; entonces ΑΔ es igual a ΕΜ, ΜΔ. Pero ΕΜ, ΜΔ son mayores que ΕΔ [I, 20]; entonces ΑΔ es también mayor que ΕΔ. Como, a su vez, ΜΕ es igual a ΜΖ, y ΜΔ es común, entonces ΕΜ, ΜΔ son iguales a ΖΜ, ΜΔ; y el ángulo ΕΜΔ es mayor que el ángulo ΖΜΔ. Por tanto, la base ΕΔ es mayor que la base ΖΔ [I, 24]. De manera semejante demostraríamos que ΖΔ es también mayor que ΓΔ; por tanto, la mayor es ΔΑ, mientras que ΔΕ es mayor que ΔΖ, y ΔΖ, que ΔΓ.

Y como MK, KΔ son mayores que MΔ [I, 20], mientras que MH es igual a MK, entonces la restante KΔ es mayor que la restante HΔ; de modo que HΔ es menor que KΔ; y como sobre uno de los lados MΔ del triángulo MΛΔ se han construido dos rectas MK, KΔ (que se encuentran) en su interior, entonces MK, KΔ son menores que MΛ, ΛΔ [I, 21]; pero MK es igual a MΛ; por tanto, la restante ΔK es menor que la restante ΔΛ. De manera semejante demostraríamos que ΔΛ es también menor que ΔΘ; por tanto, ΔH es la menor, mientras que ΔK es menor que ΔΛ, y ΔΛ que ΔΘ.

Digo también que sólo dos (rectas) iguales caerán del punto Δ al círculo a uno y otro lado de la menor ΔH.

Constrúyase en la recta MΔ y en su punto M el ángulo ΔMB igual al ángulo KMΔ y trácese ΔB. Y como MK es igual a MB, y MΔ común, los dos (lados) KM, MΔ son iguales a los dos (lados) BM, MΔ, respectivamente; y el ángulo KMΔ es igual al ángulo BMΔ; por tanto, la base ΔK es igual a la base ΔB [I, 4].

Digo que no caerá otra (recta) igual a la recta ΔK hasta el círculo desde el punto Δ.

Pues, si fuera posible, caiga y sea ΔN. Así pues, como ΔK es igual a ΔN, mientras que ΔK es igual a ΔB, entonces ΔB también es igual a ΔN, la más cercana a la menor ΔH igual a la más lejana; lo cual se ha demostrado (que es) imposible. Por tanto, no caerán más de dos (rectas) iguales desde el punto Δ hasta el círculo ABΓ a uno y otro lado de la menor ΔH.

Por consiguiente, si se toma un punto exterior a un círculo y del punto al círculo se trazan algunas rectas, de las cuales una pasa por el centro y las demás al azar, de las rectas que caen en la parte cóncava de la circunferencia, la mayor es la que pasa por el centro, y de las demás siempre la más cercana a la que pasa por el centro es mayor que la más lejana; pero de las rectas que caen en la parte convexa de la circunferencia, la menor es la que está entre el punto y el diámetro, y de las demás, la más cercana a la más pequeña es siempre menor que la más lejana, y sólo caerán dos (rectas) iguales del punto al círculo a uno y otro lado de la más pequeña. Q. E. D.

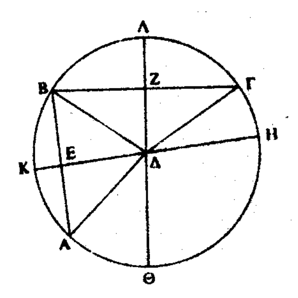
Proposición 9

Si se toma un punto dentro de un círculo y del punto al círculo caen más de dos rectas iguales, el punto tomado es el centro del círculo.

Sea ABΓ el círculo y Δ un punto dentro de él, y desde Δ hasta el círculo ABΓ caigan más de dos rectas iguales ΔA, ΔB, ΔΓ.

Digo que el punto Δ es el centro del círculo ABΓ.

Trácense, pues, AB, BΓ y divídanse en dos partes iguales por los puntos E, Z, y, trazadas EΔ, ZΔ, prolónguense hasta los puntos H, K, Θ, Λ.



Entonces, como AE es igual a EB y EΔ es común, los dos (lados) AE, EΔ son iguales a los dos (lados) BE, EΔ; y la base ΔA es igual a la base ΔB; por tanto, el ángulo AEΔ es igual al ángulo BEΔ [I, 8]; luego cada uno de los ángulos AEΔ, BEΔ es recto [I, Def. 10]; así pues, HK divide AB en dos partes iguales formando ángulos rectos. Y como si en un círculo una recta divide en dos a otra recta formando ángulos rectos, el centro del círculo está en la (recta) que corta [III, 1, Por.],

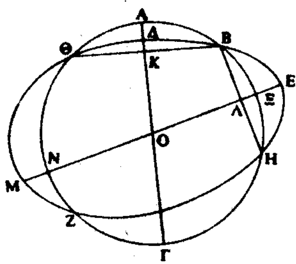
entonces el centro del círculo está en HK. Por lo mismo, el centro del círculo ABΓ está también en ΘΛ. Y HK y ΘΛ no tienen ningún otro punto común que el punto Δ; por tanto, el punto Δ es el centro del círculo ABΓ.

Por consiguiente, si se toma un punto dentro de un círculo, y del punto al círculo caen más de dos rectas iguales, el punto tomado es el centro del círculo. Q. E. D.

Proposición 10

Un círculo [88] *no corta a otro círculo en más de dos puntos.*

Pues, si fuera posible, corte el círculo ABΓ al círculo ΔEZ en más de dos puntos: B, H, Z, Θ, y, una vez trazadas BΘ, BH divídanse en dos partes iguales en los puntos K, Λ, y a partir de K, Λ trácense las rectas KΓ, ΛM formando ángulos rectos con BΘ, BH y prolónguense hasta los puntos A, E.



Así pues, como en el círculo ABΓ, una recta AΓ divide en dos partes iguales a otra recta BΘ formando ángulos rectos, entonces el centro del círculo ABΓ está en AΓ [III, 1, Por.]. Como, a su vez, en el mismo círculo ABΓ una

[88] La palabra *kýklos* (círculo) está aquí tomada en el sentido de «circunferencia».

recta NΞ divide en dos partes iguales a otra recta BH formando ángulos rectos, entonces el centro del círculo ABΓ está en NΞ. Pero se ha demostrado que está también en AΓ, y en ningún otro punto se encuentran las rectas AΓ, NΞ salvo en el (punto) O. Por tanto, el punto O es el centro del círculo ABΓ. De esta misma manera demostraríamos que también el centro del círculo ΔEZ es O; por tanto, el mismo punto O es el centro de los dos círculos que se cortan ABΓ, ΔEZ; lo cual es imposible [III, 5].

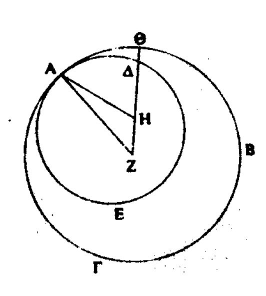
Por consiguiente, un círculo no corta a otro círculo en más de dos puntos. Q. E. D.

Proposición 11

Si dos círculos se tocan uno a otro por dentro, y se toman sus centros, la recta que une sus centros prolongada caerá sobre el punto de contacto de los círculos.

Tóquense, pues, los círculos ABΓ, AΔE uno a otro por dentro en el punto A, y tómese el centro Z del (círculo) ABΓ, y el (centro) H del (círculo) AΔE.

Digo que la recta trazada de H a Z prolongada caerá sobre A.



Pues supongamos que no, entonces, si es posible, caiga como la (recta) ZHΘ, y trácense AZ, AH.

Así pues, como AH, HZ son mayores que ZA, es decir ZΘ, quítese de cada una ZH; entonces la restante AH es mayor que HΘ, pero AH es igual a HΔ; por tanto, HΔ es también mayor que HΘ, la menor que la mayor: lo cual es imposible; luego la recta trazada desde Z a H no caerá fuera; por tanto, caerá sobre el punto de contacto A.

Por consiguiente, si dos círculos se tocan uno a otro por dentro (y se toman sus centros), la recta que une los centros (prolongada) caerá sobre el punto de contacto de los círculos. Q. E. D.

Proposición 12 [89]

Si dos círculos se tocan uno a otro por fuera, la recta que une sus centros pasará a través del punto de contacto.

Tóquense, pues, los dos círculos ABΓ, AΔE por fuera en el punto A, y tómese el centro Z del círculo ABΓ, y el (centro) H del (círculo) AΔE.

Digo que la recta trazada de Z a H pasará por el punto de contacto A [90].

Pues supongamos que no, entonces, si es posible, pase como ZΓΔH, y trácense AZ, AH.

Así pues, como el punto Z es el centro del círculo ABΓ, ZA es igual a ZΓ. Como, a su vez, el punto H es el centro del círculo AΔE, HA es igual a HΔ. Pero se ha demostrado que también ZA es igual a ZΓ; por tanto, ZA, AH son iguales a ZΓ, HΔ; de modo que la (recta) entera ZH es mayor que las (rectas) ZA, AH; pero también menor [I, 20]; lo cual es imposible. Por tanto, no es posible que la recta trazada de Z a H no pase por el punto de contacto A; luego (pasará) a través de él.

[89] Heath apunta la posibilidad de que esta proposición sea la interpolación de una prueba de Herón añadida a la proposición anterior (III, 11). Herón dice que Euclides se atuvo en la proposición 11 al caso en el que los círculos se tocan por dentro, y añade después que él se ocupará del caso en el que se tocan por fuera. La prueba y la figura que presenta son sustancialmente las de III, 12. También Itard la considera sospechosa, ver su edición de F. Peyrard, *Les oeuvres d'Euclides*, op. cit., pág. xii.

[90] La palabra usada para «punto de contacto» en esta proposición es *epaphḗ*, mientras que en la proposición anterior se utiliza *synaphḗ*.

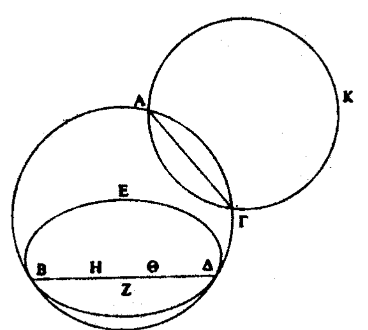
Por consiguiente, si dos círculos se tocan por fuera, la [recta] que une sus centros pasará a través del punto de contacto. Q. E. D.

Proposición 13

Un círculo no toca a otro círculo en más de un punto, ya sea por dentro o por fuera.

Pues, si es posible, toque el círculo ABΓΔ al círculo EBZΔ en primer lugar por dentro en más de un punto, a saber: en Δ, B.

Y tómese el centro H del círculo ABΓΔ, y el (centro) Θ del (círculo) EBZΔ.



Entonces la recta trazada de H a Θ caerá sobre B, Δ [III, 11]. Caiga como la recta BHΘΔ. Y como el punto H

es el centro del círculo ABΓΔ, BH es igual a HΔ; entonces BH es mayor que ΘΔ; por tanto, BΘ es mucho mayor que ΘΔ. Como, a su vez, el punto Θ es el centro del círculo EBZΔ, BΘ es igual a ΘΔ; pero se ha demostrado que también es mucho mayor que ella; lo cual es imposible; por tanto, un círculo no toca a otro círculo por dentro en más de un punto.

Digo, además, que tampoco por fuera.

Pues, si es posible, toque el círculo AΓK al círculo ABΓΔ por fuera en más de un punto, a saber: en A, Γ, y trácese AΓ.

Así pues, como se han tomado dos puntos al azar A, Γ, sobre las circunferencias de los círculos ABΓΔ, AΓK, la recta que une los puntos caerá en el interior de cada uno [III, 2]. Ahora bien, ha caído dentro del (círculo) ABΓΔ, pero fuera de AΓK [III, Def. 3], lo cual es absurdo; por tanto, un círculo no toca otro círculo por fuera en más de un punto. Pero se ha demostrado que tampoco por dentro.

Por consiguiente, un círculo no toca a otro círculo en más de un punto ya sea por dentro o por fuera. Q. E. D.

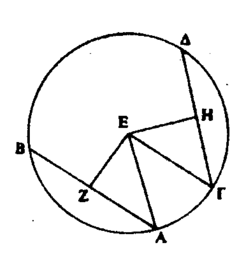
Proposición 14

En un círculo las rectas iguales están a la misma distancia del centro, y las que están a la misma distancia del centro son iguales entre sí.

Sea ABΓΔ el círculo, y sean iguales en él las rectas AB, ΓΔ.

Digo que AB, ΓΔ están a la misma distancia del centro.

Tómese, pues, el centro del círculo ABΓΔ [III, 1] y sea E, y trácense EZ, EH perpendiculares a AB, ΓΔ, y trácense AE, EΓ.



Y como una recta que pasa por el centro, la EZ, corta formando ángulos rectos a otra recta que no pasa por el centro, la AB, también la divide en dos partes iguales [III, 3]. Por tanto, AZ es igual a ZB; luego AB es el doble de AZ. Por lo mismo, ΓΔ es también el doble de ΓH; AB es, asimismo, igual a ΓΔ; por tanto, AZ es también igual a ΓH. Y como AE es igual a EΓ, el (cuadrado) de AE también es igual al (cuadrado) de EΓ. Pero los cuadrados de AZ, EZ son iguales al (cuadrado) de AE: porque el ángulo correspondiente a Z es recto; y los (cuadrados) de EH, HΓ son iguales al (cuadrado) de EΓ: porque el ángulo correspondiente a H es recto [I, 47]; por tanto, los cuadrados de AZ, ZE son iguales a los cuadrados de ΓH, HE, de los cuales el cuadrado de AZ es igual al (cuadrado) de ΓH: porque AZ es igual a ΓH; luego el (cuadrado) restante de ZE es igual al cuadrado de EH; así pues, EZ es igual a EH. Pero en un círculo se dice que dos rectas están a la misma distancia del centro, cuando las perpendiculares trazadas desde el centro hasta ellas son iguales [III, Def. 4]; por tanto, AB, ΓΔ están a la misma distancia del centro.

Pero ahora estén a la misma distancia del centro las rectas AB, ΓΔ, es decir sea EZ igual a EH.

Digo que AB también es igual a ΓΔ.

Pues, siguiendo la misma construcción, demostraríamos de modo similar que AB es el doble de AZ, y ΓΔ (el doble) de ΓH; y como AE es igual a ΓE, el cuadrado de AE es igual al cuadrado de ΓE; pero los cuadrados de EZ, ZA son

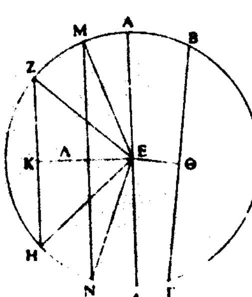
iguales al cuadrado de AE, y los cuadrados de EH, HΓ son iguales al cuadrado de ΓE [I, 47]. Por tanto, los cuadrados de EZ, ZA son iguales a los cuadrados de EH, HΓ; de los cuales el cuadrado de EZ es igual al cuadrado de EH; porque EZ es igual a EH; luego el cuadrado restante de AZ es igual al (cuadrado) de ΓH; así pues, AZ es igual a ΓH; y AB es el doble de AZ, y ΓΔ es el doble de ΓH; por tanto, AB es igual a ΓΔ.

Por consiguiente, en un círculo las rectas iguales están a la misma distancia del centro, y las que están a la misma distancia del centro son iguales entre sí. Q. E. D.

Proposición 15

En un círculo el diámetro es la recta mayor y de las demás, la más cercana al centro es siempre mayor que la más lejana.

Sea ABΓΔ el círculo y sea su diámetro AΔ, y el centro E, y la más cercana al diámetro AΔ sea BΓ, y la más lejana ZH.



Digo que AΔ es la mayor, y que BΓ es mayor que ZH.

Trácense, pues, a partir del centro E las (rectas) EΘ, EK perpendiculares a BΓ, ZH. Y como BΓ es más cercana al centro y ZH más lejana, entonces EK es mayor que EΘ [III, Def. 5]. Hágase EΛ igual a EΘ, y prolónguese a través de Λ la (recta) ΛM, trazada formando ángulos rectos con EK, hasta N, y trácense ME, EN, ZE, EH.

Y como EΘ es igual a EΛ, BΓ es también igual a MN [III, 14]. Como, a su vez, AE es igual a EM, y EΔ a EN, entonces AΔ es igual a ME, EN. Pero ME, EN son mayores que MN [I, 20] y MN es igual a BΓ; por tanto, AΔ es mayor que BΓ. Y como los dos (lados) ME, EN son iguales a los dos (lados) ZE, EH, y el ángulo MEN es mayor que el ángulo ZEH, entoces la base MN es mayor que la base ZH [I, 24]. Pero se ha demostrado que MN es igual a BΓ. Por tanto, la mayor es el diámetro AΔ, y BΓ es mayor que ZH.

Por consiguiente, en un círculo el diámetro es la (recta) mayor y, de las demás, la más cercana al centro es siempre mayor que la más lejana. Q. E. D.

Proposición 16

La (recta) trazada por el extremo del diámetro de un círculo formando ángulos rectos (con el mismo) caerá fuera del círculo, y no se interpondrá otra recta en el espacio entre la recta y la circunferencia; y el ángulo del semicírculo es mayor y el restante menor que cualquier ángulo rectilíneo agudo.

Sea el círculo ABΓ en torno al centro Δ y el diámetro AB.

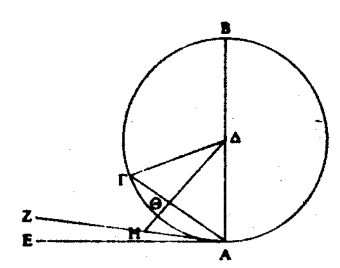
Digo que la (recta) trazada por el extremo A formando ángulos rectos con AB caerá fuera del círculo.

Pues, supongamos que no, entonces, si es posible, caiga dentro como ΓA, y trácese ΔΓ.

Como ΔA es igual a ΔΓ, el ángulo ΔAΓ es también igual al ángulo AΓΔ [I, 5]. Pero el ángulo ΔAΓ es recto; por tan-

to, el ángulo ΑΓΔ es también recto; entonces los dos ángulos ΔΑΓ, ΑΓΔ del triángulo ΑΓΔ son iguales a dos rectos; lo cual es imposible [I, 17]. Por tanto, la (recta) trazada a partir del punto A formando ángulos rectos con BA no caerá dentro del círculo. De manera semejante demostraríamos que tampoco caerá sobre la circunferencia; por tanto (caerá) fuera.

Caiga como AE.



Digo, además, que en el espacio entre la recta AE y la circunferencia ΓΘΑ no se interpondrá otra recta.

Pues, si es posible, interpóngase como ZA, y trácese a partir del punto Δ la (recta) ΔH perpendicular a ZA. Y como el (ángulo) AHΔ es recto y el ángulo ΔAH es menor que un recto, entonces AΔ es mayor que ΔH [I, 19]. Pero ΔA es igual a ΔΘ; entonces ΔΘ es mayor que ΔH, la menor que la mayor; lo cual es imposible. Por tanto, en el espacio entre la recta y la circunferencia no se interpondrá otra recta.

Digo también que el ángulo del semicírculo, comprendido por la recta BA y la circunferencia ΓΘΑ es mayor que cualquier ángulo rectilíneo agudo, y el restante, comprendido por la circunferencia ΓΘΑ y la recta AE es menor que cualquier ángulo rectilíneo agudo.

Pues si un ángulo rectilíneo es mayor que el (ángulo) comprendido por la recta BA y la circunferencia ΓΘΑ, pero menor que el comprendido por la circunferencia ΓΘΑ y la recta AE, en el espacio entre la circunferencia ΓΘΑ y la recta AE se interpondrá una recta que hará mayor el ángulo comprendido por las rectas que el comprendido por la recta BA y la circunferencia ΓΘΑ, y menor que el comprendido por la circunferencia ΓΘΑ y la recta AE. Pero no se interpone; por tanto, el ángulo agudo comprendido por rectas no será mayor que el ángulo comprendido por la recta BA y la circunferencia ΓΘΑ, ni menor que el comprendido por la circunferencia ΓΘΑ y la recta AE.

Porisma:

A partir de esto queda claro que la recta trazada por el extremo del diámetro de un círculo formando ángulos rectos (con el mismo) toca el círculo. Q. E. D.[91].

Proposición 17

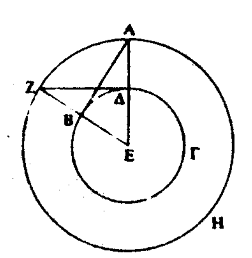
Desde un punto dado trazar una línea recta tangente a un círculo dado.

Sea el punto dado A y el círculo dado BΓΔ.

Así pues, hay que trazar desde el punto A una línea recta tangente al círculo BΓΔ.

[91] Jordano de Nemore (siglo XIII) dio el nombre de «ángulo de contingencia» al ángulo formado por el círculo y la tangente. La cuestión de si los ángulos de contingencia son nulos o tienen una magnitud que ha de tratarse por medios muy distintos a los empleados en la determinación de ángulos rectilíneos, fue un problema que ocupó a los comentadores de Euclides hasta el siglo XVIII (e. g., Proclo, Campano, Clavio, Wallis). *Vid.* HEATH, ed. cit., 2, págs. 39-43.

Tómese, pues, el centro del círculo, E, y trácese AE y con el centro E y la distancia EA descríbase el círculo AZH, y a partir del (punto) Δ trácese ΔZ formando ángulos rectos con EA, y trácense EZ, AB.



Digo que ha sido trazada AB desde el punto A tangente al círculo BΓΔ.

Pues como E es el centro de los círculos BΓΔ, AZH, entonces EA es igual a EZ, y EΔ a EB; así pues, los dos (lados) AE, EB son iguales a los dos (lados) ZE, EΔ; y comprenden el ángulo común correspondiente a E; por tanto, la base ΔZ es igual a la base AB, y el triángulo ΔEZ es igual al triángulo EBA, y los ángulos restantes son iguales a los ángulos restantes [I, 4]; por tanto, el (ángulo) EΔZ es igual al ángulo EBA. Pero el (ángulo) EΔZ es recto; luego el (ángulo) EBA también es recto. Y EB es un radio; ahora bien, la (recta) trazada por el extremo del diámetro de un círculo formando ángulos rectos (con el mismo) toca el círculo [III, 16, Por.]; por tanto, AB es tangente al círculo BΓΔ.

Por consiguiente, a partir del punto dado A se ha trazado la línea recta AB tangente al círculo BΓΔ. Q. E. F.

Proposición 18

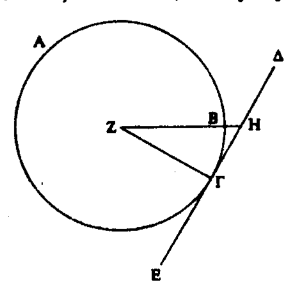
Si una recta toca un círculo, y se traza una recta desde el centro hasta el punto de contacto, la (recta) trazada será perpendicular a la tangente [92].

[92] La tangente: *hē ephaptoménē*. Es la primera vez que este término aparece sustantivado. En la proposición anterior, por ejemplo, se emplea como adjetivo.

Toque, pues, una recta ΔE al círculo ABΓ en el punto Γ, y tómese el centro Z del círculo ABΓ, y de Z a Γ trácese ZΓ.

Digo que ZΓ es perpendicular a ΔE.

Pues si no, trácese, desde Z, ZH perpendicular a ΔE.



Así pues, como el ángulo ZHΓ es recto, entonces el (ángulo) ZΓH es agudo [I, 17]; pero al lado mayor lo subtiende el ángulo mayor [I, 19]; por tanto, ZΓ es mayor que ZH; pero ZΓ es igual a ZB, por tanto, ZB es mayor que ZH, la menor que la mayor; lo cual es imposible; por tanto, ZH no es perpendicular a ΔE. Entonces de manera semejante demostraríamos que ninguna otra (es perpendicular) excepto ZΓ; por tanto, ZΓ es perpendicular a ΔE.

Por consiguiente, si una recta toca un círculo, y se traza una recta desde el centro hasta el punto de contacto, la recta trazada será perpendicular a la tangente. Q. E. D.

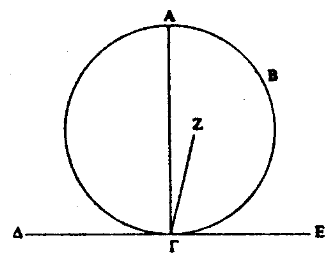
Proposición 19

Si una recta toca un círculo, y desde el punto de contacto se traza una línea recta formando ángulos rectos con la tangente, el centro del círculo estará en la recta trazada.

Toque, pues, una recta ΔE el círculo ABΓ en el punto Γ y desde Γ trácese ΓA formando ángulos rectos con ΔE.

Digo que el centro del círculo está en AΓ.

Pues, supongamos que no, entonces, si es posible, sea Z (el centro) y trácese ΓZ.



Como una recta ΔE toca el círculo ABΓ y ZΓ ha sido trazada desde el centro al punto de contacto, entonces ZΓ es perpendicular a ΔE [III, 18]; por tanto, el (ángulo) ZΓE es recto. Pero el (ángulo) AΓE también es recto; luego el ángulo ZΓE es igual al (ángulo) AΓE, el menor al mayor; lo cual es imposible. Por tanto, Z no es el centro del círculo ABΓ. De manera semejante demostraríamos que ningún otro (punto) salvo (un punto) en AΓ.

Por consiguiente, si una recta toca un círculo, y desde el punto de contacto se traza una línea recta formando ángulos rectos con la tangente, el centro del círculo estará en la recta trazada. Q. E. D.

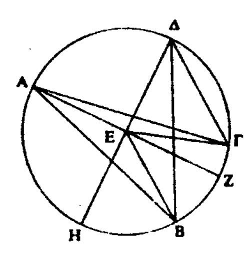
Proposición 20

En un círculo, el ángulo correspondiente al centro es el doble del correspondiente a la circunferencia cuando los ángulos tienen como base la misma circunferencia.

Sea el círculo ABΓ y sea el ángulo correspondiente a su centro BEΓ, y el (ángulo) BAΓ el correspondiente a la circunferencia, y tengan como base la misma circunferencia BΓ.

Digo que el ángulo BEΓ es el doble del (ángulo) BAΓ.

Una vez trazada la recta AE, prolónguese hasta Z.



Así pues, como EA es igual a EB, el ángulo EAB es también igual al (ángulo) EBA [I, 5]; por tanto, los ángulos EAB, EBA son el doble de EAB. Pero el (ángulo) BEZ es igual a los (ángulos) EAB, EBA [I, 32]; por tanto, el (ángulo) BEZ es también el doble de EAB. Por lo mismo, el (ángulo) ZEΓ es el doble del (ángulo) EAΓ. Luego el (ángulo) entero BEΓ, es el doble del (ángulo) entero BAΓ.

Trácese de nuevo una recta quebrada [93] y sea el otro ángulo BΔΓ, y, una vez trazada ΔE, prolónguese hasta H. De manera semejante demostraríamos que el ángulo HEΓ es el doble del (ángulo) EΔΓ, de cuyas partes el (ángulo) HEB es el doble del (ángulo) EΔB; por tanto, el (ángulo) restante BEΓ es el doble de BΔΓ.

Por consiguiente, en un círculo el ángulo correspondiente al centro es el doble del correspondiente a la circunferencia cuando los ángulos tienen como base la misma circunferencia. Q. E. D.

[93] *Keklásthō dè pálin.* Lit.: «quiébrese de nuevo (otra línea)». El verbo *kláō*, «romper, quebrar», era el término técnico para dibujar desde un punto una línea recta (quebrada) que se encuentra con otra línea recta o curva y después vuelve hacia atrás a otro punto, o para dibujar líneas

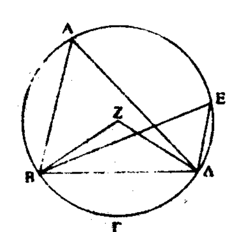
rectas desde dos puntos que se encuentran en otro punto, línea recta o curva. *Keklásthai* es uno de los términos geométricos cuya definición debe ser asumida según Aristóteles *(Apo.* I 10, 76b9).

PROPOSICIÓN 21

En un círculo los ángulos en el mismo segmento son iguales entre sí.

Sea el círculo ABΓΔ y en el mismo segmento BAEΔ estén los ángulos BAΔ, BEΔ.

Digo que los ángulos BAΔ, BEΔ son iguales entre sí.



Tómese, pues, el centro del círculo ABΓΔ y sea Z, y trácense BZ, ZΔ.

Y como el ángulo BZΔ es el correspondiente al centro y el (ángulo) BAΔ el correspondiente a la circunferencia, y tienen como base la misma circunferencia BΓΔ, entonces el ángulo BZΔ es el doble del (ángulo) BAΔ [III, 20]. Por lo mismo, el (ángulo) BZΔ es también el doble del (ángulo) BEΔ; luego el (ángulo) BAΔ es igual al ángulo BEΔ.

Por consiguiente, en un círculo los ángulos en el mismo segmento son iguales entre sí. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 22

Los ángulos opuestos de los cuadriláteros en los círculos son iguales a dos rectos.

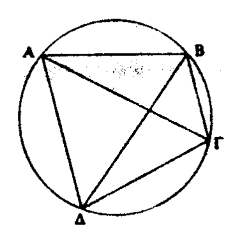
Sea el círculo ABΓΔ, y sea el cuadrilátero en el mismo ABΓΔ.

Digo que los ángulos opuestos son iguales a dos rectos.

Trácense AΓ, BΔ.

Así pues, como en todo triángulo los tres ángulos son iguales a dos rectos [I, 32], entonces los tres ángulos ΓAB, ABΓ, BΓA del triángulo ABΓ son iguales a dos rectos.

Pero el ángulo ΓAB es igual al (ángulo) BΔΓ: porque están en el mismo segmento BAΔΓ [III, 21]; y el (ángulo) AΓB (es igual) al (ángulo) AΔB: porque están en el mismo segmento AΔΓB; por tanto, el (ángulo) entero AΔΓ es igual a los (ángulos) BAΓ, AΓB. Añádase a ambos el (ángulo) ABΓ; entonces los (ángulos) ABΓ, BAΓ, AΓB son iguales a los (ángulos) ABΓ, AΔΓ; pero los ángulos ABΓ, BAΓ, AΓB son iguales a dos rectos. Por tanto, los (ángulos) ABΓ, AΔΓ son también iguales a dos rectos. De manera semejante demostraríamos que los ángulos BAΔ, ΔΓB son también iguales a dos rectos.

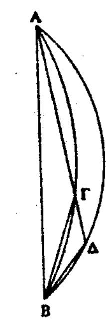


Por consiguiente, los ángulos opuestos de los cuadriláteros en los círculos son iguales a dos rectos. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 23

Sobre la misma recta no se podrán construir dos segmentos circulares semejantes y desiguales en el mismo lado.

Pues, si fuera posible, sobre la misma recta AB constrúyanse dos segmentos circulares semejantes y desiguales en el mismo lado, los (segmentos) AΓB, AΔB, y trácese la (recta) AΓΔ, y trácense ΓB, ΔB.



Así pues, como el segmento AΓB es semejante al segmento AΔB, y segmentos semejantes de círculos son los que admiten ángulos iguales [III, Def. 11], entonces el ángulo AΓB es igual al (án-

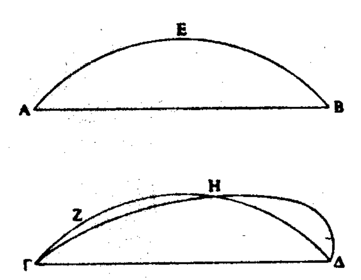
gulo) AΔB, el externo al interno, lo cual es imposible [I, 16].

Por consiguiente, sobre la misma recta no se podrán construir dos segmentos circulares semejantes y desiguales en el mismo lado. Q. E. D.

Proposición 24

Los segmentos circulares semejantes que están sobre rectas iguales son iguales entre sí.

Estén, pues, sobre las rectas iguales AB, ΓΔ los segmentos circulares semejantes AEB, ΓZΔ.



Digo que el segmento AEB es igual al segmento ΓZΔ.

Pues si se aplica el segmento AEB al (segmento) ΓZΔ y se pone el punto A sobre el punto Γ y la recta AB sobre la (recta) ΓΔ, el punto B coincidirá también con el punto Δ por ser igual AB a ΓΔ; y habiendo coincidido AB con ΓΔ coincidirá también el segmento AEB con el (segmento) ΓZΔ. Porque si la recta AB coincide con la (recta) ΓΔ pero el segmento AEB no coincide con el (segmento) ΓZΔ, o bien caerá dentro de él o fuera, o se desviará como el (segmento) ΓHΔ, y un círculo cortará a otro círculo en más de dos puntos; lo cual es imposible [III, 10]. Por tanto, no es

posible que coincidiendo la recta AB con la recta ΓΔ no coincida también el segmento AEB con el segmento ΓZΔ; luego coincidirá con él y será igual a él.

Por consiguiente, segmentos circulares semejantes que están sobre rectas iguales son iguales entre sí. Q. E. D.

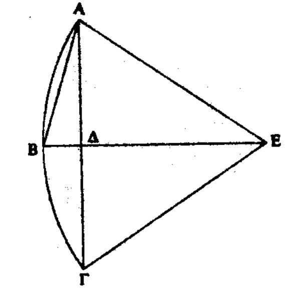
Proposición 25

Dado un segmento de círculo completar el trazado del círculo[94] *del que es segmento.*

Sea ABΓ el segmento de círculo dado.

Así pues, hay que completar el trazado del círculo del que el segmento ABΓ es segmento.

Divídase, pues, en dos partes iguales AΓ en el punto Δ, y trácese a partir del punto Δ la (recta) ΔB formando ángulos rectos con AΓ, y trácese AB; entonces el ángulo ABΔ es o mayor o igual o menor que el (ángulo) BAΔ.



En primer lugar, sea mayor, y constrúyase en la recta BA y en su punto A el (ángulo) BAE igual al (ángulo) ABΔ, y prolónguese ΔB hasta E, y trácese EΓ.

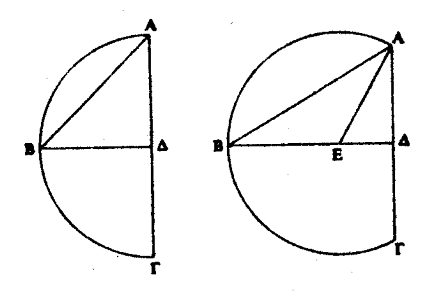
Así pues, como el ángulo ABE es igual al (ángulo) BAE, entonces la recta EB es también igual a EA [I, 6]. Y como AΔ es igual a ΔΓ, y ΔE es común, los dos lados AΔ, ΔE son iguales respectivamente a los dos (lados) ΓΔ, ΔE; y el ángulo AΔE es igual al ángulo ΓΔE: porque cada uno (de

[94] *Prosanagrápsai.*

ellos) es recto; por tanto, la base AE es igual a la base EΓ. Pero se ha demostrado que AE es igual a BE; por tanto, BE es igual a ΓE; luego las tres (rectas) AE, EB, EΓ son iguales entre sí; así pues, el círculo descrito con el centro E y como distancia una de las (rectas) AE, EB, EΓ pasará también por los restantes puntos y se habrá completado su trazado [III, 9].

Por tanto, se ha completado el trazado del círculo del segmento de círculo dado. Y es evidente que el segmento ABΓ es menor que el semicírculo por encontrarse fuera de él el centro E.

De forma semejante, si el ángulo ABΔ es igual al (ángulo) BAΔ, al ser igual AΔ a cada una de las (rectas) BΔ, ΔΓ, las tres ΔA, ΔB, ΔΓ serán iguales entre sí y Δ será el centro del círculo completo y, evidentemente, ABΓ será un semicírculo.



Pero si el (ángulo) ABΔ es menor que el (ángulo) BAΔ, y construimos en la recta BA y en su punto A (un ángulo) igual al ángulo ABΔ, el centro caerá dentro del segmento ABΓ sobre la (recta) ΔB, y el segmento ABΓ será claramente mayor que el semicírculo.

Por consiguiente, dado un segmento de círculo, se ha completado el trazado del círculo. Q. E. F.

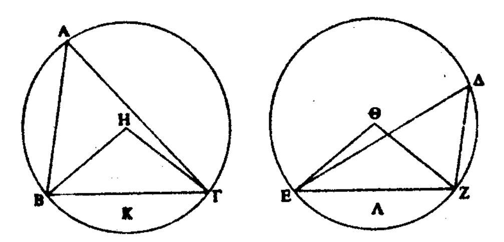
Proposición 26

En los círculos iguales los ángulos iguales están sobre circunferencias iguales, ya estén en los centros o en las circunferencias.

Sean ABΓ, ΔEZ círculos iguales y estén en ellos los ángulos iguales BHΓ, EΘZ en los centros, y en las circunferencias los (ángulos iguales) BAΓ, EΔZ.

Digo que la circunferencia BKΓ es igual a la circunferencia EΛZ.

Trácense, pues, BΓ, EZ.



Y como los círculos ABΓ, ΔEZ son iguales, los radios son iguales; entonces las dos (rectas) BH, HΓ son iguales a las dos (rectas) EΘ, ΘZ; y el ángulo correspondiente a H es igual al ángulo correspondiente a Θ; por tanto, la base BΓ es igual a la base EZ [I, 4]. Y como el ángulo correspondiente a A es también igual al ángulo correspondiente a Δ, entonces el segmento BAΓ es semejante al segmento EΔZ [III, Def. 11]; y están sobre rectas iguales [BΓ, EZ]; ahora bien, los segmentos circulares semejantes (que están) sobre rectas iguales son iguales entre sí [III, 24]; por tanto, el segmento BAΓ es igual al segmento EΔZ. Pero el círculo entero ABΓ es igual al círculo entero ΔEZ; por

tanto, la circunferencia restante BKΓ es igual a la circunferencia EΔZ.

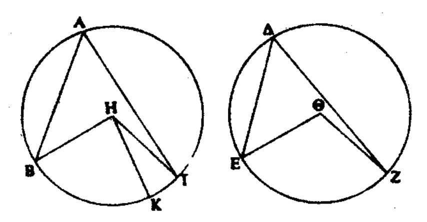
Por consiguiente, en los círculos iguales los ángulos iguales están sobre circunferencias iguales, ya estén en los centros o en las circunferencias. Q. E. D.

Proposición 27

En los círculos iguales, los ángulos que están sobre circunferencias iguales son iguales entre sí, ya estén en los centros o en las circunferencias.

Estén, pues, en los círculos iguales ABΓ, ΔEZ, sobre las circunferencias iguales BΓ, EZ, los (ángulos) BHΓ, EΘZ, en los centros H, Θ, y en las circunferencias los (ángulos) BAΓ, EΔZ.

Digo que el ángulo BHΓ es igual al (ángulo) EΘZ, y el (ángulo) BAΓ es igual al (ángulo) EΔZ.



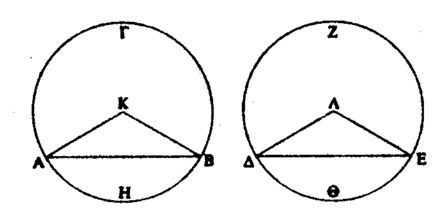
Pues si el (ángulo) BHΓ no es igual al (ángulo) EΘZ, uno de ellos es mayor. Sea mayor el (ángulo) BHΓ, y constrúyase en la recta BH y en su punto H el (ángulo) BHK igual al ángulo EΘZ [I, 23]; pero los ángulos iguales están sobre circunferencias iguales cuando están en los centros [III, 26]; por tanto, la circunferencia BK es igual a la circunferencia EZ. Pero EZ es igual a BΓ; entonces BK es también igual a BΓ, la menor a la mayor; lo cual es imposible. Por tanto, los ángulos BHΓ, EΘZ no son desiguales; luego son iguales y el (ángulo) correspondiente a A es la mitad del (ángulo) BHΓ, y el correspondiente a Δ la mitad del (ángulo) EΘZ [III, 20]; por tanto, el ángulo correspondiente a A es también igual al correspondiente a Δ.

Por consiguiente, en los círculos iguales los ángulos que están sobre circunferencias iguales son iguales entre sí, ya estén en los centros o en las circunferencias. Q. E. D.

Proposición 28

En los círculos iguales las rectas iguales cortan circunferencias iguales, la mayor (igual) a la mayor y la menor a la menor.

Sean ABΓ, ΔEZ círculos iguales, y en los círculos estén las rectas iguales AB, ΔE que cortan como circunferencias mayores AΓB, ΔZE y como menores AHB, ΔΘE.



Digo que la circunferencia mayor AΓB es igual a la circunferencia mayor ΔZE, y la circunferencia menor AHB a la (circunferencia) ΔΘE.

Tómense, pues, los centros de los círculos K, Λ y trácense AK, KB, ΔΛ, ΛE.

Y como son círculos iguales los radios también son iguales; entonces los dos (lados) ΑΚ, ΚΒ son iguales a los dos (lados) ΔΛ, ΛΕ; y la base ΑΒ igual a la base ΔΕ; por tanto, el ángulo ΑΚΒ es igual al ángulo ΔΛΕ [I, 8].

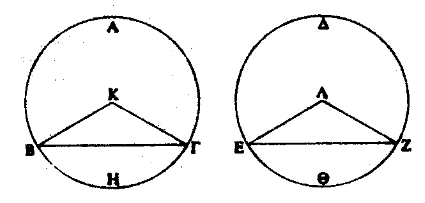
Pero los ángulos iguales están sobre circunferencias iguales, cuando están en los centros [III, 26]; por tanto, la circunferencia ΑΗΒ es igual a la (circunferencia) ΔΘΕ. Pero el círculo entero ΑΒΓ es también igual al círculo entero ΔΕΖ; por tanto, la circunferencia restante ΑΓΒ es también igual a la circunferencia restante ΔΖΕ.

Por consiguiente, en los círculos iguales, las rectas iguales cortan circunferencias iguales, la mayor (igual) a la mayor y la menor a la menor. Q. E. D.

Proposición 29

En los círculos iguales las rectas iguales subtienden circunferencias iguales.

Sean ΑΒΓ, ΔΕΖ círculos iguales, y en ellos córtense las circunferencias iguales ΒΗΓ, ΕΘΖ, y trácense las rectas ΒΓ, ΕΖ.



Digo que ΒΓ es igual a ΕΖ.

Tómense, pues, los centros de los círculos y sean Κ, Λ, y trácense ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ.

Ahora bien, como la circunferencia ΒΗΓ es igual a la circunferencia ΕΘΖ, el ángulo ΒΚΓ es también igual al (ángulo) ΕΛΖ [III, 27].

Y como los círculos ΑΒΓ, ΔΕΖ son iguales, los radios son también iguales; entonces las dos (rectas) ΒΚ, ΚΓ son iguales a las dos (rectas) ΕΛ, ΛΖ; y comprenden ángulos iguales; por tanto, la base ΒΓ es igual a la base ΕΖ [I, 4].

Por consiguiente, en los círculos iguales las rectas iguales subtienden circunferencias iguales. Q. E. D.

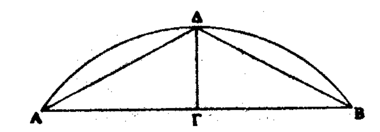
Proposición 30

Dividir en dos partes iguales una circunferencia dada.

Sea ΑΔΒ la circunferencia dada.

Así pues, hay que dividir en dos partes iguales la circunferencia ΑΔΒ.

Trácese, pues, ΑΒ y divídase en dos partes iguales por el (punto) Γ, y a partir del punto Γ trácese ΓΔ formando ángulos rectos con la recta ΑΒ, y trácense ΑΔ, ΔΒ.



Ahora bien, como ΑΓ es igual a ΓΒ, y ΓΔ es común, los dos (lados) ΑΓ, ΓΔ son iguales a los dos (lados) ΒΓ, ΓΔ; y el ángulo ΑΓΔ es igual al ángulo ΒΓΔ: porque cada uno (de ellos) es recto; entonces la base ΑΔ es igual a la base ΔΒ [I, 4]. Pero las rectas iguales cortan circunferencias iguales la mayor (igual) a la mayor y la menor a la menor

[III, 28]; y cada una de las circunferencias AΔ, ΔB es menor que un semicírculo; por tanto, la circunferencia AΔ es igual a la circunferencia ΔB.

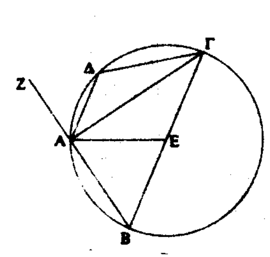
Por consiguiente, se ha dividido en dos partes iguales por el punto Δ la circunferencia dada. Q. E. F.

Proposición 31

En un círculo el ángulo en el semicírculo es recto, el (ángulo) en el segmento mayor es menor que un recto, el (ángulo) en el segmento menor es mayor que un recto; y además el ángulo del segmento mayor es mayor que un recto y el ángulo del segmento menor es menor que un recto.

Sea ABΓΔ el círculo y sea BΓ su diámetro y el centro E, y trácense BA, AΓ, AΔ, ΔΓ.

Digo que el ángulo BAΓ en el semicírculo BAΓ es recto, y el ángulo ABΓ en el segmento ABΓ mayor que el semicírculo es menor que un recto, y el ángulo AΔΓ en el segmento AΔΓ menor que el semicírculo es mayor que un recto.



Trácese AE, y prolónguese BA hasta Z.

Y como BE es igual a EA, el ángulo ABE es también igual al (ángulo) BAE [I, 5]. Como a su vez ΓE es igual a EA, el (ángulo) AΓE es también igual al (ángulo) ΓAE [I, 5]; por tanto, el (ángulo) entero BAΓ es igual a los dos (ángulos) ABΓ, AΓB. Pero el (ángulo) ZAΓ exterior al triángulo ABΓ es también igual a los dos ángulos ABΓ, AΓB [I, 32]; por tanto, el ángulo BAΓ es también

igual al (ángulo) ZAΓ; luego (cada uno de ellos) es recto, [I, Def. 10]; así pues, el ángulo BAΓ en el semicírculo BAΓ es recto.

Además, como los dos ángulos ABΓ, BAΓ del triángulo ABΓ son menores que dos rectos [I, 17], y el (ángulo) BAΓ es recto, entonces el ángulo ABΓ es menor que un recto; y está en el segmento ABΓ mayor que el semicírculo.

Y como ABΓΔ es un cuadrilátero en un círculo, y los ángulos opuestos de los cuadriláteros en los círculos son iguales a dos rectos [III, 22], y el (ángulo) ABΓ es menor que un recto, entonces el ángulo restante AΔΓ es mayor que un recto; y está en el segmento AΔΓ menor que el semicírculo.

Digo también que el ángulo del segmento mayor, el comprendido por la circunferencia ABΓ y la recta AΓ es mayor que un recto, y que el ángulo del segmento menor, el comprendido por la circunferencia AΔ[Γ] y la recta AΓ es menor que un recto. Y esto es claro de suyo. Pues como el (ángulo) comprendido por las rectas BA, AΓ es recto, entonces el comprendido por la circunferencia ABΓ y la recta AΓ es mayor que un recto. Asimismo, como el (ángulo comprendido) por las rectas AΓ, AZ es recto, entonces el comprendido por la recta ΓA y la circunferencia AΔ[Γ] es menor que un recto.

Por consiguiente, en un círculo el ángulo en el semicírculo es recto, el (ángulo) en el segmento mayor es menor que un recto, y el ángulo en el [segmento] menor es mayor que un recto, y además el [ángulo] del segmento mayor, mayor que un recto, y el del segmento menor, menor que un recto. Q. E. D.

[Porisma:

A partir de esto queda claro que si un ángulo de un triángulo es igual a los (otros) dos, el ángulo es recto por

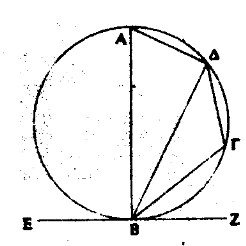
ser el ángulo exterior a aquel igual a los mismos; y si los ángulos adyacentes son iguales, son rectos] [95].

Proposición 32

Si una recta toca un círculo, y desde el punto de contacto hasta el círculo se traza una recta que corte el círculo, los ángulos que forma con la recta tangente serán iguales a los ángulos en los segmentos alternos del círculo.

Toque, pues, la recta EZ al círculo ΑΒΓΔ en el punto B, y a partir del punto B trácese una recta BΔ en el círculo ΑΒΓΔ que lo corte.

Digo que los ángulos que forma BΔ con la tangente EZ serán iguales a los ángulos en los segmentos alternos del círculo, es decir, que el ángulo ZBΔ es igual al ángulo construido en el segmento BAΔ, y el ángulo EBΔ es igual al ángulo construido en el segmento ΔΓΒ.



Trácese, pues, a partir de B la (recta) BA formando ángulos rectos con EZ, y tómese al azar un punto Γ en la circunferencia BΔ, y trácense AΔ, ΔΓ, ΓB.

Y como una recta EZ es tangente al círculo ΑΒΓΔ en (el punto) B, y desde el punto de contacto se ha trazado BA formando ángulos rectos con la tangente, entonces el centro del círculo ΑΒΓΔ está en BA [III, 19]. Por tanto, BA es diámetro del círculo ΑΒΓΔ; luego el ángulo AΔB, siendo un (ángulo) en un semicírculo, es recto [III, 31]. Por tanto, los ángulos restantes BAΔ, ABΔ son iguales a un recto [I, 32]. Pero el (ángulo) ABZ es recto; por tanto, el (ángulo) ABZ es igual a los (ángulos) BAΔ, ABΔ. Quítese de ambos el (ángulo) ABΔ; entonces el ángulo restante ΔBZ es igual al ángulo BAΔ en el segmento alterno del círculo. Asimismo, como ΑΒΓΔ es un cuadrilátero en un círculo, sus ángulos opuestos son iguales a dos rectos [III, 22]. Pero los (ángulos) ΔBZ, ΔBE son también iguales a dos rectos; luego los (ángulos) ΔBZ, ΔBE son iguales a los (ángulos) BAΔ, BΓΔ, de los cuales el (ángulo) BAΔ se ha demostrado que es igual al (ángulo) ΔBZ; por tanto, el ángulo ΔBE es igual al (ángulo) ΔΓB en el segmento alterno del círculo ΔΓB.

Por consiguiente, si una recta toca un círculo y desde el punto de contacto hasta el círculo se traza una recta que corte el círculo, los ángulos que forma con la recta tangente serán iguales a los ángulos en los segmentos alternos del círculo. Q. E. D.

Proposición 33

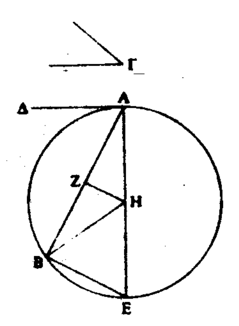
Sobre una recta dada, describir un segmento de círculo que admita un ángulo igual a un ángulo rectilíneo dado.

Sea AB la recta dada, y el ángulo rectilíneo dado el correspondiente a Γ.

Así pues, hay que describir sobre la recta dada AB un segmento de círculo que admita un ángulo igual al correspondiente a Γ.

[95] Este porisma es omitido por Heiberg como una interpolación de fecha posterior a Teón. No hay necesidad de este corolario y, por otra parte, la claúsula *hóper édei deîxai* aparece antes del porisma, y no después, como es habitual en estos casos en los *Elementos*.

El ángulo correspondiente a Γ es entonces o agudo, o recto u obtuso; sea en primer lugar agudo, y como en la primera figura, constrúyase en (la recta) AB y en su punto A el (ángulo) BAΔ igual al ángulo correspondiente a Γ; entonces el (ángulo) BAΔ es también agudo. Trácese AE formando ángulos rectos con ΔA, y divídase en dos partes iguales AB en el (punto) Z, y trácese a partir del punto Z, ZH formando ángulos rectos con AB, y trácese HB.

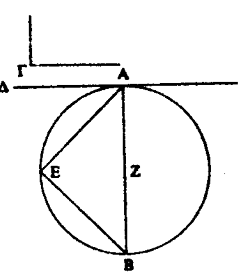


Y como AZ es igual a ZB, y ZH es común, los dos (lados) AZ, ZH son iguales a los dos (lados) BZ, ZH; y el (ángulo) AZH es igual al (ángulo) BZH; luego la base AH es igual a la base BH [I, 4]. Por tanto, el círculo descrito con el centro H y la distancia HA pasará también por B. Descríbase y sea ABE, y trácese EB. Así pues, como AΔ forma ángulos rectos con AE a partir del extremo A del diámetro AE, entonces AΔ toca el círculo ABE [III, 16, Por.]; así pues, como una recta AΔ toca el círculo ABE, y desde el punto de contacto A ha sido trazada una recta AB hasta el círculo ABE, entonces el ángulo ΔAB es igual al (ángulo) AEB en el segmento alterno del círculo [III, 32]. Pero el ángulo ΔAB es igual al correspondiente a Γ; luego el (ángulo) correspondiente a Γ es también igual al (ángulo) AEB.

Por consiguiente, sobre la recta dada AB ha sido descrito el segmento de círculo AEB que admite el ángulo AEB igual al ángulo dado correspondiente a Γ.

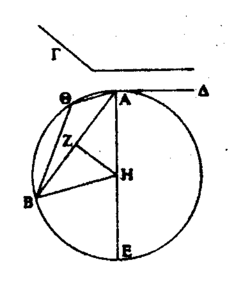
Ahora bien, sea recto el ángulo correspondiente a Γ; y haya que describir asimismo sobre AB un segmento de círculo que admita un ángulo igual al ángulo recto correspondiente a Γ.

Constrúyase el (ángulo) BAΔ igual al ángulo recto correspondiente a Γ como está en la segunda figura y divídase en dos partes iguales AB en el (punto) Z, y con el centro Z y como distancia una de las rectas ZA, ZB descríbase el círculo AEB.



Entonces la recta AΔ toca el círculo ABE por ser recto el ángulo correspondiente a A [III, 16, Por.]. Y el ángulo BAΔ es igual al (ángulo) en el segmento AEB: porque siendo un ángulo en un semicírculo también él es recto [III, 31]. Pero el (ángulo) BAΔ es también igual al correspondiente a Γ. Entonces el (ángulo) en (el segmento) AEB es igual al correspondiente a Γ.

Por consiguiente, también se ha descrito sobre AB el segmento de círculo AEB que admite un ángulo igual al correspondiente a Γ.



Ahora bien, sea obtuso el ángulo correspondiente a Γ; y constrúyase sobre la recta AB y en su punto A el ángulo BAΔ igual a él como está en la tercera figura; trácese AE formando ángulos rectos con AΔ, y divídase de nuevo en dos partes iguales AB en el (punto) Z; trácese ZH formando ángulos rectos con AB, y trácese HB.

Y como AZ es de nuevo igual a ZB, y ZH es común, los dos (lados) AZ, ZH son iguales a los dos (lados) BZ, ZH; y el ángulo AZH es igual al ángulo BZH; luego la base AH es igual a la base BH [I, 4]; por tanto, el círculo descrito con el centro H y la distancia HA pasará también por B. Pase como AEB. Y como AΔ forma ángulos rectos con

el diámetro AE a partir de un extremo, entonces AΔ es tangente al círculo AEB [III, 16, Por.]. Y AB se ha trazado a partir del punto de contacto A; por tanto, el ángulo BAΔ es igual al ángulo construido en el segmento alterno de círculo AΘB [III, 32]. Pero el ángulo BAΔ es igual al correspondiente a Γ. Así pues, el ángulo en el segmento AΘB también es igual al correspondiente a Γ.

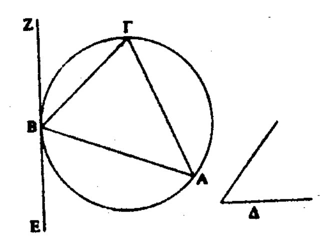
Por consiguiente, sobre la recta dada AB se ha descrito el segmento de círculo AΘB que admite un ángulo igual al correspondiente a Γ. Q. E. F.

Proposición 34

A partir de un círculo dado cortar un segmento que admita un ángulo igual a un ángulo rectilíneo dado.

Sea ABΓ el círculo dado y el ángulo rectilíneo dado el correspondiente a Δ.

Así pues, hay que cortar un segmento del círculo ABΓ que admita un ángulo igual al ángulo rectilíneo dado correspondiente a Δ.



Trácese EZ tangente al (círculo) ABΓ en el punto B, y constrúyase en la recta ZB y en su punto B el (ángulo) ZBΓ igual al ángulo correspondiente a Δ [I, 23].

Así pues, como una recta EZ toca el círculo ABΓ, y a partir del punto de contacto B se ha trazado BΓ, entonces el (ángulo) ZBΓ es igual al ángulo construido en el segmento alterno BAΓ [III, 32]. Pero el ángulo ZBΓ es igual al correspondiente a Δ; por tanto, el (ángulo) en el segmento BAΓ es también igual al correspondiente a Δ.

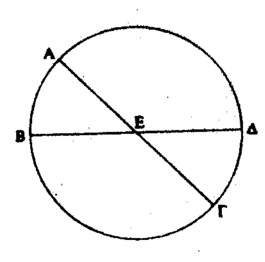
Por consiguiente, a partir del círculo dado ABΓ se ha cortado el segmento BAΓ que admite un ángulo igual al ángulo rectilíneo dado correspondiente a Δ. Q. E. F.

Proposición 35

Si en un círculo se cortan dos rectas entre sí, el rectángulo comprendido por los segmentos de una es igual al rectángulo comprendido por los segmentos de la otra.

Córtense, pues, en el círculo ABΓΔ las dos rectas AΓ, BΔ en el punto E.

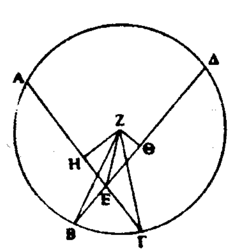
Digo que el rectángulo comprendido por AE, EΓ es igual al rectángulo comprendido por ΔE, EB.



Así pues, si AΓ, BΔ pasan por el centro de modo que E sea el centro del círculo ABΓΔ, queda claro que siendo iguales AE, EΓ, ΔE, EB el rectángulo comprendido por AE, EΓ es también igual al rectángulo comprendido por ΔE, EB.

No pasen por el centro AΓ, ΔB y tómese el centro del círculo ABΓΔ y sea Z, y trácense a partir de Z, ZH, ZΘ perpendiculares a las rectas AΓ, ΔB y trácense ZB, ZΓ, ZE.

Y puesto que una recta que pasa por el centro HZ corta formando ángulos rectos a otra recta que no pasa por el centro AΓ, la divide también en dos partes iguales [III, 3]; por tanto, AH es igual a HΓ. Así pues, como la recta AΓ se ha cortado en partes iguales en H y en desiguales en E, entonces el rectángulo comprendido por AE, EΓ junto con el cuadrado de EH es igual al (cuadrado) de HΓ [II, 5]; añádase el (cuadrado) de HZ; entonces el (rectángulo comprendido) por AE, EΓ junto con los (cuadrados) de HE, HZ es igual a los (cuadrados) de ΓH, HZ. Pero el (cuadrado) de ZE es igual a los (cuadrados) de EH, HZ, y el (cuadrado) de ZΓ es igual a los (cuadrados) de ΓH, HZ [I, 47]; entonces el (rectángulo comprendido) por AE, EΓ junto con ZE es igual al (cuadrado) de ZΓ. Pero ZΓ es igual a ZB; entonces el (rectángulo comprendido) por AE, EΓ junto con el (cuadrado) de EZ es igual al (cuadrado) de ZB. Por lo mismo, el (rectángulo comprendido) por ΔE, EB junto con el (cuadrado) de ZE es también igual al (cuadrado) de ZB. Pero se ha demostrado asimismo, que el (rectángulo comprendido) por AE, EΓ junto con el (cuadrado) de ZE es igual al (cuadrado) de ZB; entonces el (rectángulo comprendido) por AE, EΓ junto con el (cuadrado) de ZE es igual al (rectángulo comprendido) por ΔE, EB junto con el cuadrado de ZE. Quítese de ambos el (cuadrado) de ZE; entonces el rectángulo restante comprendido por AE, EΓ es igual al rectángulo comprendido por ΔE, EB.



Por consiguiente, si en un círculo se cortan dos rectas entre sí, el rectángulo comprendido por los segmentos de una es igual al rectángulo comprendido por los segmentos de la otra. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 36

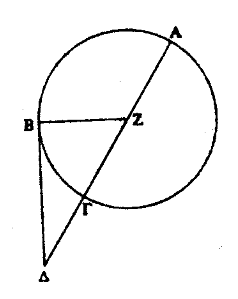
Si se toma un punto fuera de un círculo y de él al círculo caen dos rectas, y una de ellas corta el círculo y la otra lo toca, el (rectángulo comprendido) por la secante entera y la (parte) exterior tomada entre el punto y la circunferencia convexa es igual al cuadrado de la tangente.

Tómese, pues, un punto Δ fuera del círculo ABΓ, y de Δ al círculo caigan las dos rectas ΔΓ[A], ΔB; y corte una, ΔΓA, el círculo ABΓ, y tóquelo la otra BΔ.

Digo que el rectángulo comprendido por AΔ, ΔΓ es igual al cuadrado de ΔB.

Entonces [Δ] ΓA o pasa por el centro o no.

En primer lugar, pase por el centro y sea Z el centro del círculo ABΓ, y trácese ZB; entonces el (ángulo) ZBΔ es recto [III, 18]. Y como la recta AΓ ha sido dividida en dos partes iguales en Z, y ΓΔ se ha añadido a ella, entonces el (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔΓ junto con el (cuadrado) de ZΓ es igual al (cuadrado) de ZΔ [II, 6]. Pero ZΓ es igual a ZB; por tanto, el (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔΓ junto con el (cuadrado) de ZB es igual al (cuadrado) de ZΔ. Pero los (cuadrados) de ZB, BΔ son iguales al (cuadrado) de ZΔ [I, 47]; luego el (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔΓ junto con el (cuadrado) de ZB es igual a los (cuadrados) de ZB, BΔ. Quítese de ambos el (cuadrado) de ZB; entonces el (rectángulo) restante (comprendido) por AΔ, ΔΓ es igual al (cuadrado) de la tangente ΔB.



Ahora bien, no pase ΔΓΑ por el centro del círculo ΑΒΓ, y tómese el centro Ε, y, desde Ε trácese ΕΖ perpendicular a ΑΓ y trácense ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ; entonces el ángulo ΕΒΔ es recto [III, 18]. Y como una recta ΕΖ que pasa por el centro corta formando ángulos rectos a una recta ΑΓ que no pasa por el centro, también la divide en dos partes iguales [III, 3]; entonces ΑΖ es igual a ΖΓ. Y como la recta ΑΓ se ha dividido en dos partes iguales en el punto Ζ, y se ha añadido a ella ΓΔ, el (rectángulo comprendido) por ΑΔ, ΔΓ junto con el (cuadrado) de ΖΓ es igual al (cuadrado) de ΖΔ [II, 6]. Añádase a ambos el (cuadrado) de ΖΕ; entonces el (rectángulo comprendido) por ΑΔ, ΔΓ junto con los (cuadrados) de ΓΖ, ΖΕ es igual a los (cuadrados) de ΖΔ, ΖΕ. Pero el (cuadrado) de ΕΓ es igual a los (cuadrados) de ΓΖ, ΖΕ: porque el (ángulo) ΕΖΓ es recto [I, 47]; pero el (cuadrado) de ΕΔ es igual a los (cuadrados) de ΔΖ, ΖΕ; por tanto, el (rectángulo comprendido) por ΑΔ, ΔΓ junto con el (cuadrado) de ΕΓ es igual al (cuadrado) de ΕΔ. Y ΕΓ es igual a ΕΒ; luego el (rectángulo comprendido) por ΑΔ, ΔΓ junto con el (cuadrado) de ΕΒ es igual al (cuadrado) de ΕΔ. Pero los (cuadrados) de ΕΒ, ΒΔ son iguales al (cuadrado) de ΕΔ: porque el ángulo ΕΒΔ es recto [I, 47'; por tanto, el (rectángulo comprendido) por ΑΔ, ΔΓ junto con el (cuadrado) de ΕΒ es igual a los (cuadrados) de ΕΒ, ΒΔ. Quítese de ambos el (cuadrado) de ΕΒ; entonces el (rectángulo) restante (comprendido) por ΑΔ, ΔΓ es igual al (cuadrado) de ΔΒ.

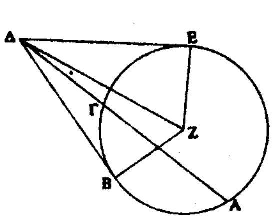
Por consiguiente, si se toma un punto fuera de un círculo, y de él al círculo caen dos rectas, y una de ellas corta el círculo y la otra lo toca, el (rectángulo comprendido) por la secante entera y la (parte) exterior tomada entre el punto y la circunferencia convexa es igual al cuadrado de la tangente. Q. E. D.

Proposición 37

Si se toma un punto fuera de un círculo y del punto al círculo caen dos rectas, y una de ellas corta el círculo, y la otra cae (sobre él), y además el (rectángulo comprendido) por la secante entera y la (parte) exterior tomada entre el punto y la circunferencia convexa es igual al cuadrado de la que cae, la (recta) que cae tocará el círculo.

Tómese, pues, un punto Δ fuera del círculo ΑΒΓ, y de Δ al círculo ΑΒΓ caigan las dos rectas ΔΓΑ, ΔΒ; corte ΔΓΑ el círculo, y caiga ΔΒ, y sea el (rectángulo comprendido) por ΑΔ, ΔΓ igual al (cuadrado) de ΔΒ.

Digo que ΔΒ toca el círculo ΑΒΓ.



Pues trácese ΔΕ tangente a ΑΒΓ, y tómese el centro del círculo ΑΒΓ, y sea Ζ, y trácense ΖΕ, ΖΒ, ΖΔ. Entonces el (ángulo) ΖΕΔ es recto [III, 18]. Y como ΔΕ toca el círculo ΑΒΓ y ΔΓΑ lo corta, entonces el (rectángulo comprendido) por ΑΔ, ΔΓ es igual al cuadrado de ΔΕ. Pues el rectángulo comprendido por ΑΔ, ΔΓ era también igual al (cuadrado) de ΔΒ; entonces el (cuadrado) de ΔΕ es igual al (cuadrado) de ΔΒ; por tanto, ΔΕ es igual a ΔΒ. Pero ΖΕ es también igual a ΖΒ; entonces los dos (lados) ΔΕ, ΕΖ son iguales a los dos (lados) ΔΒ, ΒΖ; y su base ΖΔ es común; por tanto, el ángulo ΔΕΖ es igual al ángulo ΔΒΖ [I, 8]. Pero ΔΕΖ es recto;

por tanto, el (ángulo) ΔBZ es recto. Y ZB prolongada es un diámetro; pero la (recta) trazada formando ángulos rectos con el diámetro de un círculo en un extremo toca el círculo [III, 16, Por.]; por tanto, ΔB toca el círculo ABΓ. De manera semejante se demostraría si el centro se encontrara en AΓ.

Por consiguiente, si se toma un punto fuera de un círculo y del punto al círculo caen dos rectas, y una de ellas corta el círculo, y la otra cae (sobre él), y además el (rectángulo comprendido) por la secante entera y la (parte) exterior tomada entre el punto y la circunferencia convexa es igual al cuadrado de la que cae, la que cae tocará el círculo. Q. E. D.

LIBRO CUARTO

DEFINICIONES

1. Se dice que una figura rectilínea está inscrita en otra figura rectilínea, cuando cada uno de los ángulos [96] de la figura inscrita toca los lados respectivos de aquella en la que se inscribe.
2. De manera semejante, se dice que una figura está circunscrita en torno a otra figura, cuando cada lado de la (figura) circunscrita toca los ángulos respectivos de aquella en torno a la cual se circunscribe.
3. Se dice que una figura rectilínea está inscrita en un círculo, cuando cada ángulo de la (figura) inscrita toca la circunferencia del círculo.
4. Se dice que una figura rectilínea está circunscrita en torno a un círculo, cuando cada lado de la (figura) circunscrita toca la circunferencia del círculo.
5. De manera semejante, se dice que un círculo está inscrito en una figura, cuando la circunferencia del círculo toca cada lado de la figura en la que está inscrito.

---

[96] Se refiere a los vértices.

6. Se dice que un círculo está circunscrito en torno a una figura, cuando la circunferencia del círculo toca cada ángulo de la (figura) en torno a la que está circunscrito.
7. Se dice que una recta está adaptada a un círculo, cuando sus extremos están en la circunferencia del círculo.

Proposición 1

Adaptar a un círculo dado una recta igual a una recta dada que no sea mayor que el diámetro del círculo.

Sea ABΓ el círculo dado y Δ la recta dada no mayor que el diámetro del círculo.

Así pues, hay que adaptar al círculo ABΓ una recta igual a la recta Δ.

Trácese el diámetro BΓ del círculo ABΓ. Entonces, si BΓ es igual a Δ, ya se habrá hecho lo propuesto: porque al círculo ABΓ se ha adaptado BΓ igual a la recta Δ. Pero si BΓ es mayor que Δ, hágase ΓE igual a Δ, y con el centro Γ y la distancia ΓE descríbase el círculo EAZ, y trácese ΓA.

Entonces, como el punto Γ es el centro del círculo EAZ, ΓA es igual a ΓE. Pero ΓE es igual a Δ; por tanto, Δ es igual a ΓA.

Por consiguiente, al círculo dado ABΓ se ha adaptado ΓA igual a la recta Δ. Q. E. F.

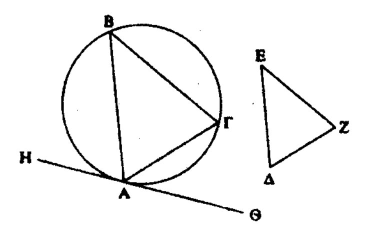
Proposición 2

Inscribir en un círculo dado un triángulo de ángulos iguales a los de un triángulo dado.

Sea ABΓ el círculo dado y ΔEZ el triángulo dado.

Así pues, hay que inscribir en el círculo ABΓ un triángulo de ángulos iguales a los del triángulo ΔEZ.

Trácese HΘ tangente al círculo ABΓ en el (punto) A [III, 16, Por.], y constrúyase en la recta AΘ y en su punto A el (ángulo) ΘAΓ igual al ángulo ΔEZ, y en la recta AH y en su punto A el (ángulo) HAB igual al (ángulo) ΔZE [I, 23], y trácese BΓ.



Pues bien, como una recta AΘ toca al círculo ABΓ, y desde el punto de contacto A hasta el círculo ha sido trazada la recta AΓ, entonces el (ángulo) ΘAΓ es igual al (ángulo) ABΓ en el segmento alterno del círculo [III, 32]. Pero el (ángulo) ΘAΓ es igual al ángulo ΔEZ; entonces el ángulo ABΓ es también igual al (ángulo) ΔEZ. Por lo mismo, el (ángulo) AΓB es también igual al (ángulo) ΔZE; por tanto, el (ángulo) restante BAΓ es igual al (ángulo) restante EΔZ [I, 32].

Por consiguiente, se ha inscrito en el círculo dado un triángulo de ángulos iguales a los del triángulo dado. Q. E. F.

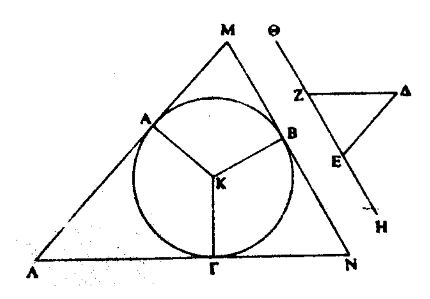
Proposición 3

Circunscribir en torno a un círculo dado un triángulo de ángulos iguales a los de un triángulo dado.

Sea ΑΒΓ el círculo dado, y ΔΕΖ el triángulo dado.

Así pues, hay que circunscribir en torno al círculo ΑΒΓ un triángulo de ángulos iguales a los del triángulo ΔΕΖ.

Prolónguese ΕΖ en ambos sentidos hasta los puntos Η, Θ, y tómese el centro Κ del círculo ΑΒΓ [III, 1], y trácese una recta cualquiera ΚΒ, y constrúyase en la recta ΚΒ y en su punto Κ el ángulo ΒΚΑ igual al ángulo ΔΕΗ, y el ángulo ΒΚΓ igual al ángulo ΔΖΘ [I, 23], y a través de los puntos Α, Β, Γ, trácense ΛΑΜ, ΜΒΝ, ΝΓΛ tangentes al círculo ΑΒΓ [III, 16, Por.].



Ahora bien, como las (rectas) ΛΜ, ΜΝ, ΝΛ tocan el círculo ΑΒΓ en los puntos Α, Β, Γ, y ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ se han trazado desde el centro Κ hasta los puntos Α, Β, Γ, entonces los ángulos correspondientes a los puntos Α, Β, Γ son rectos [III, 18]. Y como los cuatro ángulos del cuadrilátero ΑΜΒΚ son iguales a cuatro rectos, puesto que ΑΜΒΚ se divide en dos triángulos y los ángulos ΚΑΜ, ΚΒΜ son rectos, entonces los (ángulos) restantes ΑΚΒ, ΑΜΒ son iguales a dos rectos. Pero los (ángulos) ΔΕΗ, ΔΕΖ son también iguales a dos rectos [I, 13]; entonces los (ángulos) ΑΚΒ, ΑΜΒ son iguales a los (ángulos) ΔΕΗ, ΔΕΖ, de los cuales ΑΚΒ es igual a ΔΕΗ; por tanto, el (ángulo) restante ΑΜΒ es igual al restante ΔΕΖ. De manera semejante, se demostraría que el (ángulo) ΛΝΒ es también igual al (ángulo) ΔΖΕ; por tanto, también el (ángulo) restante ΜΛΝ es igual al (ángulo) ΕΔΖ [I, 32]. Luego el triángulo ΛΜΝ es de ángulos iguales a los del triángulo ΔΕΖ; y está circunscrito en torno al círculo ΑΒΓ.

Por consiguiente, se ha circunscrito en torno al círculo dado un triángulo de ángulos iguales a los del triángulo dado. Q. E. F.

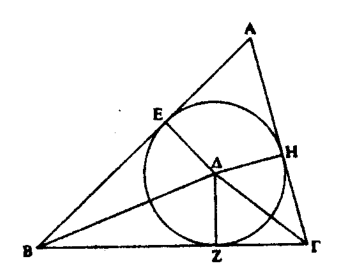
Proposición 4

Inscribir un círculo en un triángulo dado.

Sea ΑΒΓ el triángulo dado.

Así pues, hay que inscribir un círculo en el triángulo ΑΒΓ.

Divídanse en dos partes iguales los ángulos ΑΒΓ, ΑΓΒ con las rectas ΒΔ, ΓΔ [I, 9] y encuéntrense éstas en el punto Δ; trácense desde el punto Δ hasta las rectas ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ las perpendiculares ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ.



Ahora bien, como el ángulo ABΔ es igual al (ángulo) ΓBΔ, y el (ángulo) recto BEΔ es también igual al (ángulo) recto BZΔ, entonces EBΔ, ZBΔ son dos triángulos que tienen dos ángulos iguales a dos ángulos, y un lado igual a un lado, a saber: BΔ que subtiende a uno de los ángulos iguales y es común a ellos (a los dos triángulos), entonces tendrán también los lados restantes iguales a los lados restantes [I, 26]; por tanto, ΔE es igual a ΔZ. Por lo mismo, ΔH es igual a ΔZ. Luego las tres rectas ΔE, ΔZ, ΔH son iguales entre sí; por tanto, el círculo descrito con el centro Δ y como distancia una de las (rectas) (Δ)E, (Δ)Z, (Δ)H [97] pasará también por los puntos restantes y tocará las rectas AB, BΓ, ΓA por ser rectos los ángulos correspondientes a los puntos E, Z, H. Pues, si las cortara, la (recta) trazada perpendicular al diámetro de un círculo en un extremo caería dentro del círculo; lo cual se ha demostrado que es absurdo [III, 16]; por tanto, el círculo descrito con el centro Δ y como distancia una de las (rectas) (Δ)E, (Δ)Z, (Δ)H no cortará las rectas AB, BΓ, ΓA; luego las tocará y el círculo estará inscrito en el triángulo ABΓ [III, Def. 5]. Inscríbase como ZHE.

Por consiguiente, se ha inscrito el círculo EZH [97bis] en el triángulo dado ABΓ. Q. E. F.

[97] En el texto: ... *kaì diastémati hení tôn* E, Z, H, «... y como distancia una de las E, Z, H». No hay más remedio que incluir la letra Δ para saber a lo que se refiere Euclides. Se utiliza frecuentemente la misma expresión a lo largo del libro IV; como en otros casos, pongo entre paréntesis lo que no aparece en el texto griego.

[97bis] A pesar de la diferencia de orden de las letras en la denominación (ZHE, EZH), se trata del mismo círculo.

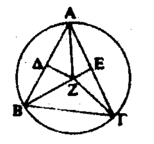
Proposición 5

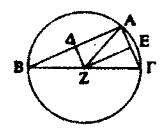
Circunscribir un círculo en torno a un triángulo dado.

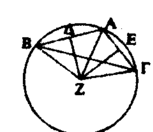
Sea ABΓ el triángulo dado.

Así pues, hay que circunscribir un círculo en torno al triángulo dado ABΓ.

Divídanse en dos partes iguales las rectas AB, AΓ por los puntos Δ, E [I, 10], y a partir de los puntos Δ, E trácense ΔZ, EZ formando ángulos rectos con AB, AΓ; entonces coincidirán o bien dentro del triángulo ABΓ o sobre la recta BΓ o fuera de BΓ.







Coincidan en primer lugar dentro en el punto Z, y trácense ZB, ZΓ, ZA. Y como AΔ es igual a ΔB, y ΔZ es común y (forma) ángulos rectos, entonces la base AZ es igual a la base ZB [I, 4]. De manera semejante demostraríamos que ΓZ es también igual a AZ, de modo que ZB es también igual a ZΓ; por tanto, las tres (rectas) ZA, ZB, ZΓ son iguales entre sí. Luego el círculo descrito con el centro Z y como distancia una de las (rectas) (Z)A, (Z)B, (Z)Γ pasará también por los puntos restantes, y el círculo estará circunscrito en torno al triángulo ABΓ. Circunscríbase como ABΓ.

Ahora bien, coincidan ΔZ, EZ sobre la recta BΓ en el punto Z como está en el segundo dibujo, y trácese AZ.

De manera semejante demostraríamos que el punto Z es el centro del círculo circunscrito en torno al triángulo ABΓ.

Ahora bien, coincidan ΔZ, EZ fuera del triángulo ABΓ en el punto Z de nuevo, como está en el tercer dibujo, y trácense AZ, BZ, ΓZ. Y como AΔ es de nuevo igual a ΔB y ΔZ es común y (forma) ángulos rectos, entonces la base AZ es igual a la base BZ [I, 4]. De manera semejante demostraríamos que ΓZ también es igual a AZ, de modo que BZ también es igual a ZΓ; por tanto, el círculo descrito con el centro Z y como distancia una de las (rectas) ZA, ZB, ZΓ pasará también por los puntos restantes, y estará circunscrito en torno al triángulo ABΓ.

Por consiguiente, se ha circunscrito un círculo en torno al triángulo dado. Q. E. F.

(Porisma)

Y queda claro que, cuando el centro del círculo cae dentro del triángulo, el ángulo BAΓ que se encuentra en un segmento mayor que el semicírculo es menor que un recto; cuando el centro cae sobre la recta BΓ, el ángulo BAΓ que se encuentra en el semicírculo es recto; cuando el centro del círculo cae fuera del triángulo, el (ángulo) BAΓ que se encuentra en un segmento menor que el semicírculo es mayor que un recto [III, 31].

[De modo que cuando el ángulo dado es menor que un recto, AZ, EZ caerán dentro del triángulo, cuando es recto, sobre BΓ, cuando es mayor que un recto, fuera de BΓ. Q. E. F.] [98].

[98] Heiberg atetiza este último párrafo. Simson ya había observado: «Está manifiestamente viciado el texto griego en el corolario, en que se hace mención del ángulo dado, siendo así que en la proposición nada hay ni puede haber del ángulo dado» *(Los seis primeros libros, y el undécimo, y duodécimo de los Elementos de Euclides*, ed. cit., notas, pág.

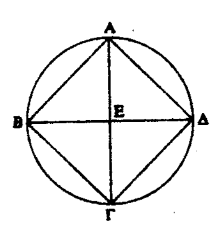
Proposición 6

Inscribir un cuadrado en un círculo dado.

Sea ABΓΔ el círculo dado.

Así pues, hay que inscribir un cuadrado en el círculo ABΓΔ.

Trácense dos diámetros AΓ, BΔ del círculo ABΓΔ formando ángulos rectos entre sí, y trácense AB, BΓ, ΓΔ, ΔA.



Y como BE es igual a EΔ: porque E es el centro, y EA es común y (forma) ángulos rectos, entonces la base AB es igual a la base AΔ [I, 4]. Por lo mismo, cada una de las (rectas) BΓ, ΓΔ es igual a cada una de las (rectas) AB, AΔ; por tanto, el cuadrilátero ABΓΔ es equilátero.

Digo además que también es rectangular.

Pues como la recta BΔ es un diámetro del círculo ABΓΔ, entonces BAΔ es un semicírculo; por tanto, el ángulo BAΔ es recto [III, 31]. Por lo mismo, cada uno de los (ángulos) ABΓ, BΓΔ, ΓΔA es también recto; por tanto, el cuadrilátero ABΓΔ es rectangular. Pero se ha demostrado que también es equilátero. Luego es un cuadrado [I, Def. 22] y está inscrito en el círculo ABΓΔ.

Por consiguiente, se ha inscrito el cuadrado ABΓΔ en el círculo dado. Q. E. F.

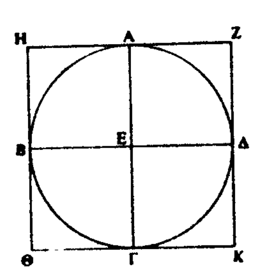
307. Simson, por otra parte, también había reparado en un defecto de la demostración de la proposición IV, 5: la suposición no probada de que ΔZ, EZ habrán de coincidir (vid. *op. cit.*, pág. 98).

PROPOSICIÓN 7

Circunscribir un cuadrado en torno a un círculo dado.

Sea ABΓΔ el círculo dado.

Así pues, hay que circunscribir un cuadrado en torno al círculo ABΓΔ.



Trácense dos diámetros AΓ, BΔ del círculo ABΓΔ formando ángulos rectos entre sí, y a través de los puntos A, B, Γ, Δ trácense ZH, HΘ, ΘK, KZ tangentes al círculo ABΓΔ [III, 16, Por.].

Así pues, como ZH toca el círculo ABΓΔ, y EA se ha trazado desde el centro E hasta el punto de contacto A, entonces los ángulos correspondientes a A son rectos [III, 18]. Por lo mismo, los ángulos correspondientes a los puntos B, Γ, Δ son rectos.

Y como el ángulo AEB es recto, y el (ángulo) EBH es también recto, HΘ es paralela a AΓ [I, 28]. Por lo mismo, AΓ es también paralela a ZK. De modo que HΘ es también paralela a ZK [I, 30]. De manera semejante demostraríamos que cada una de las (rectas) HZ, ΘK es paralela a BEΔ. Por tanto, HK, HΓ, AK, ZB, BK son paralelogramos; luego HZ es igual a ΘK y HΘ a ZK [I, 34]. Ahora bien, como AΓ es igual a BΔ, mientras que AΓ es también igual a cada una de las (rectas) HΘ, ZK y BΔ es igual a cada una de las (rectas) HZ, ΘK [I, 34], entonces el cuadrilátero ZHΘK es equilátero.

Digo, además, que también es rectangular.

Pues como HBEA es un paralelogramo, y el (ángulo) AEB es recto, entonces el (ángulo) AHB es también recto [I, 34]. De manera semejante demostraríamos que los ángulos correspondientes a Θ, K, Z son rectos. Por tanto, ZHΘK es rectangular. Pero se ha demostrado que también es equilátero; luego es un cuadrado. Y está circunscrito en torno al círculo ABΓΔ.

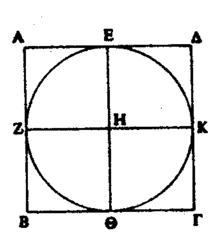
Por consiguiente, se ha circunscrito un cuadrado en torno al círculo dado. Q. E. F.

PROPOSICIÓN 8

Inscribir un círculo en un cuadrado dado.

Sea ABΓΔ el cuadrado dado.

Así pues, hay que inscribir un círculo en el cuadrado ABΓΔ.



Divídase en dos partes iguales cada una de las (rectas) AΔ, AB por los puntos E, Z, respectivamente [I, 10], y a través de E trácese EΘ paralela a una de las dos (rectas) AB, ΓΔ, y a través de Z trácese ZK paralela a una de las dos (rectas) AΔ, BΓ [I, 31]; entonces cada una de las (figuras) AK, KB, AΘ, ΘΔ, AH, HΓ, BH, HΔ es un paralelogramo, y los lados opuestos evidentemente son iguales [I, 34]. Y como AΔ es igual a AB, y AE es la mitad de AΔ, mientras que AZ es la mitad de AB, entonces AE es igual a AZ; de modo que los lados opuestos también (son iguales); por tanto, ZH es también igual a HE. De manera semejante demostraríamos que cada una de las (rectas) HΘ, HK es igual a cada una de las (rectas) ZH, HE; por tanto, las cuatro (rectas) HE, HZ, HΘ, HK son iguales entre sí. Luego el

círculo descrito con el centro H y como distancia una de las (rectas) (H)E, (H)Z, (H)Θ, (H)K pasará también por los puntos restantes; y tocará las rectas AB, BΓ, ΓΔ, ΔA por ser rectos los ángulos correspondientes a E, Z, Θ, K; porque si el círculo cortara las (rectas) AB, BΓ, ΓΔ, ΔA, la (recta) trazada formando ángulos rectos con el diámetro del círculo desde un extremo caería dentro del círculo; lo que se ha demostrado (que es) absurdo [III, 16]. Por tanto, el círculo trazado con el centro H y como distancia una de las (rectas) (H)E, (H)Z, (H)Θ, (H)K no corta las rectas AB, BΓ, ΓΔ, ΔA. Luego las tocará y estará inscrito en el cuadrado ABΓΔ.

Por consiguiente, se ha inscrito un círculo en el cuadrado dado. Q. E. F.

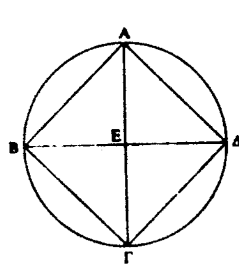
Proposición 9

Circunscribir un círculo en torno a un cuadrado dado.

Sea ABΓΔ el cuadrado dado.

Así pues, hay que circunscribir un círculo en torno al cuadrado ABΓΔ.

Pues una vez trazadas AΓ, BΔ, córtense entre sí en E. Y como ΔA es igual a AB y AΓ es común los dos (lados) ΔA, AΓ son iguales a los dos (lados) BA, AΓ; y la base ΔΓ es igual a la base BΓ; por tanto, el ángulo ΔAΓ es igual al ángulo BAΓ [I, 8]; luego el ángulo ΔAB ha sido dividido en dos partes iguales por AΓ. De manera semejante demostraríamos que cada uno de los (ángulos) ABΓ, BΓΔ, ΓΔA ha sido dividido en dos partes iguales por las rectas



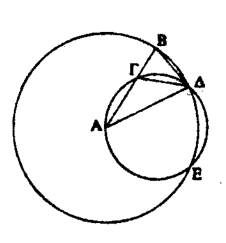
AΓ, ΔB. Y como el ángulo ΔAB es igual al (ángulo) ABΓ, y el (ángulo) EAB es la mitad del (ángulo) ΔAB, y el (ángulo) EBA es la mitad del (ángulo) ABΓ, entonces el (ángulo) EAB es igual al (ángulo) EBA; de modo que el lado EA es también igual al (lado) EB [I, 6]. De manera semejante demostraríamos que las (rectas) EA, EB son iguales respectivamente a las rectas EΓ, EΔ. Por tanto, las cuatro (rectas) EA, EB, EΓ, EΔ son iguales entre sí. Luego el círculo descrito con el centro E y como distancia una de las (rectas) (E)A, (E)B, (E)Γ, (E)Δ pasará también por los puntos restantes y estará circunscrito en torno al cuadrado ABΓΔ. Circunscríbase como ABΓΔ.

Por consiguiente, se ha circunscrito un círculo en torno al cuadrado dado. Q. E. F.

Proposición 10

Construir un triángulo isósceles cada uno de cuyos ángulos de la base sea el doble del restante.

Tómese una recta AB y córtese por el punto Γ de modo que el rectángulo comprendido por AB, BΓ sea igual al cuadrado de ΓA [II, 11]; y con el centro A y la distancia AB descríbase el círculo BΔE. Y adáptese al círculo BΔE la recta BΔ igual a la recta AΓ que no es mayor que el diámetro del círculo BΔE [IV, 1]; y trácense AΔ, ΔΓ y circunscríbase en torno al triángulo AΓΔ el círculo AΓΔ [IV, 5].



Ahora bien, como el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es igual al (cuadrado) de AΓ, y AΓ es igual a BΔ, entonces el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es igual al (cuadrado) de BΔ. Y como se ha tomado el punto B exterior al círculo AΓΔ, y desde B hasta el círculo AΓΔ han caído dos rectas BA, BΔ y una de ellas (lo) corta mientras que la otra cae (en él), y el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es igual al (cuadrado) de BΔ, entonces BΔ toca el círculo AΓΔ [III, 37]. Así pues, como BΔ lo toca, y ΔΓ ha sido trazada desde el punto de contacto Δ, entonces el ángulo BΔΓ es igual al ángulo ΔAΓ en el segmento alterno del círculo [III, 32]. Así pues, como el (ángulo) BΔΓ es igual al (ángulo) ΔAΓ, añádase a ambos el (ángulo) ΓΔA; entonces el (ángulo) entero BΔA es igual a los dos (ángulos) ΓΔA, ΔAΓ. Pero el (ángulo) externo BΓΔ es igual a los (ángulos) ΓΔA, ΔAΓ [I, 32]; luego el (ángulo) BΔA es también igual al (ángulo) BΓΔ. Pero el (ángulo) BΔA es igual al (ángulo) ΓBA, puesto que el lado AΔ es también igual al (lado) AB [I, 5]; de modo que el (ángulo) ΔBA es igual al (ángulo) BΓΔ. Por tanto, los tres (ángulos) BΔA, ΔBA, BΓΔ son iguales entre sí. Y como el ángulo ΔBΓ es igual al (ángulo) BΓΔ, el lado BΔ es también igual al lado ΔΓ [I, 6]. Pero BΔ es por hipótesis igual a ΓA; entonces ΓA es también igual a ΓΔ; de modo que el ángulo ΓΔA es también igual al ángulo ΔAΓ [I, 5]: por tanto, los (ángulos) ΓΔA, ΔAΓ son el doble del (ángulo) ΔAΓ. Pero el (ángulo) BΓΔ es igual a los (ángulos) ΓΔA, ΔAΓ; luego el (ángulo) BΓΔ es también el doble del (ángulo) ΓAΔ. Pero el (ángulo) BΓΔ es igual a cada uno de los (ángulos) BΔA, ΔBA; por tanto, cada uno de los (ángulos) BΔA, ΔBA es también el doble del (ángulo) ΔAB.

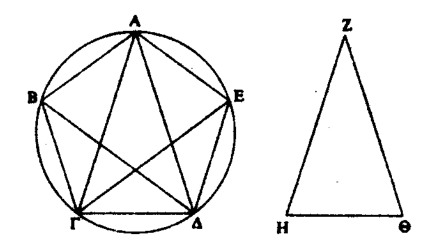
Por consiguiente, se ha construido un triángulo isósceles ABΔ cada uno de cuyos ángulos de la base ΔB es el doble del ángulo restante. Q. E. F. [99].

PROPOSICIÓN 11

Inscribir un pentágono equilátero y equiángulo en un círculo dado.

Sea ABΓΔE el círculo dado.

Así pues, hay que inscribir un pentágono equilátero y equiángulo en el círculo ABΓΔE.



[99] Existen razones para conjeturar que la construcción del triángulo de esta proposición y su relación con el pentágono regular fue un descubrimiento de los pitagóricos. Apoyan esta conjetura:

a. El escolio IV, núm. 2 (STAMATIS, V, pág. 204) dice: «este libro es un descubrimiento de los pitagóricos».

b. En el resumen histórico de Eudemo recogido en Proclo, dice que Pitágoras descubrió «la construcción de las figuras cósmicas» (debemos entender los cinco sólidos regulares).

c. Jámblico *(Perí toû Pithagorikoû bíou*, cap. 18, s. 88) se hace eco de la leyenda en la que se atribuye a Hipaso la publicación de este descubrimiento secreto y su posterior muerte por impiedad. Para más detalles, *vid.* HEATH, ed. cit., 2, págs. 97-100.

Tómese el triángulo isósceles ZHΘ cada uno de cuyos ángulos correspondientes a H, Θ sea el doble del correspondiente a Z [IV, 10], e inscríbase en el círculo ΑΒΓΔΕ el triángulo ΑΓΔ de ángulos iguales a los de ZHΘ, de modo que el ángulo ΓΑΔ sea igual al ángulo correspondiente a Z y los (ángulos) correspondientes a H, Θ sean iguales respectivamente a los (ángulos) ΑΓΔ, ΓΔΑ [IV, 2]; por tanto, cada uno de los (ángulos) ΑΓΔ, ΓΔΑ es también el doble de ΓΑΔ. Entonces divídase en dos partes iguales cada uno de los (ángulos) ΑΓΔ, ΓΔΑ con las (rectas) ΓΕ, ΔΒ, respectivamente, y trácense ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΑ.

Así pues, como cada uno de los ángulos ΑΓΔ, ΓΔΑ es el doble de ΓΑΔ, y ha sido dividido en dos partes iguales mediante las rectas ΓΕ, ΔΒ, entonces los cinco ángulos ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΓΔΒ, ΒΔΑ son iguales entre sí. Pero los ángulos iguales están sobre circunferencias iguales [III, 26]; por tanto, las cinco circunferencias ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ son iguales entre sí. Pero a las circunferencias iguales las subtienden rectas iguales [III, 29]; por tanto, las cinco rectas ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ son iguales entre sí; luego el pentágono ΑΒΓΔΕ es equilátero.

Digo además que es también equiángulo.

Pues como la circunferencia ΑΒ es igual a la circunferencia ΔΕ, añádase a ambas ΒΓΔ; entonces la circunferencia entera ΑΒΓΔ es igual a la circunferencia entera ΕΔΓΒ. Ahora bien, el ángulo ΑΕΔ está sobre la circunferencia ΑΒΓΔ, y el ángulo ΒΑΕ sobre la circunferencia ΕΔΓΒ; por tanto, el ángulo ΒΑΕ es igual al (ángulo) ΑΕΔ [III, 27]. Por lo mismo, cada uno de los ángulos ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ es igual a cada uno de los (ángulos) ΒΑΕ, ΑΕΔ; luego el pentágono ΑΒΓΔΕ es equiángulo. Pero se ha demostrado que también es equilátero.

Por consiguiente, se ha inscrito un pentágono equilátero y equiángulo en el círculo dado. Q. E. F.

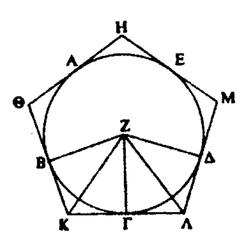
Proposición 12

Circunscribir un pentágono equilátero y equiángulo en torno a un círculo dado.

Sea ΑΒΓΔΕ el círculo dado.

Así pues, hay que circunscribir un pentágono equilátero y equiángulo en torno al círculo ΑΒΓΔΕ.

Considérense Α, Β, Γ, Δ, Ε los puntos de los ángulos del pentágono inscrito, de modo que las circunferencias ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ sean iguales [IV, 11]; y a través de los puntos Α, Β, Γ, Δ, Ε trácense ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ tangentes al círculo [III, 16, Por.], y tómese el centro Ζ del círculo ΑΒΓΔΕ [III, 1], y trácense ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ, ΖΛ, ΖΔ.



Y como la recta ΚΛ toca el (círculo) ΑΒΓΔΕ en Γ, y ΖΓ ha sido trazada desde el centro Ζ hasta el punto de contacto Γ, entonces ΖΓ es perpendicular a ΚΛ [III, 18]; por tanto, cada uno de los ángulos correspondientes a Γ es recto. Por lo mismo, los ángulos correspondientes a los puntos Β, Δ son también rectos. Y como el ángulo ΖΓΚ es también recto, entonces el (cuadrado) de ΖΚ es igual a los (cuadrados) de ΖΓ, ΓΚ [I, 47]. Por lo mismo, el (cuadrado) de ΖΚ es igual a los (cuadrados) de ΖΒ, ΒΚ; de modo que los (cuadrados) de ΖΓ, ΓΚ son iguales a los (cuadrados) de ΖΒ, ΒΚ, de los cuales el (cuadrado) de ΖΓ es igual al (cuadrado) de ΖΒ; por tanto, el (cuadrado) restante de ΓΚ es

igual al (cuadrado) de BK. Luego BK es igual a ΓK. Y como ZB es igual a ZΓ, y ZK es común, entonces los dos (lados) BZ, ZK son iguales a los dos (lados) ΓZ, ZK; y la base BK es igual a la base ΓK; entonces el (ángulo) BZK es igual al (ángulo) KZΓ [I, 8]; y el (ángulo) BKZ al (ángulo) ZKΓ; por tanto, el (ángulo) BZΓ es el doble del (ángulo) KZΓ y el (ángulo) BKΓ (el doble) del (ángulo) ZKΓ. Por lo mismo, el (ángulo) ΓZΔ es también el doble del (ángulo) ΓZΛ y el (ángulo) ΔΛΓ (el doble) del (ángulo) ZΛΓ.

Ahora bien, como la circunferencia BΓ es igual a ΓΔ, el ángulo BZΓ es también igual al (ángulo) ΓZΔ [III, 27]. Y el (ángulo) BZΓ es el doble del (ángulo) KZΓ, y el (ángulo) ΛZΓ (el doble) del (ángulo) ΛZΓ; entonces el (ángulo) KZΓ es también igual al (ángulo) ΛZΓ; pero el ángulo ZΓK es también igual al (ángulo) ZΓΛ. Entonces ZKΓ, ZΛΓ son dos triángulos que tienen dos ángulos iguales a dos ángulos y un lado igual a un lado, a saber: el común a ambos ZΓ; por tanto, también tendrán los lados restantes iguales a los lados restantes y el ángulo restante igual al ángulo restante [I, 26]; así pues, la recta KΓ es igual a la (recta) ΓΛ y el ángulo ZKΓ al (ángulo) ZΛΓ. Y como KΓ es igual a ΓΛ, entonces KΛ es el doble de KΓ. Por lo mismo, se demostraría que ΘK es también el doble de BK. Y BK es igual a KΓ; entonces ΘK también es igual a KΛ. De manera semejante se demostraría que cada una de las (rectas) ΘH, HM, MΛ también es igual a cada una de las (rectas) ΘK, KΛ; por tanto, el pentágono HΘKΛM es equilátero.

Digo, además, que también es equiángulo.

Pues como el ángulo ZKΓ es igual al (ángulo) ZΛΓ y se ha demostrado que el (ángulo) ΘKΛ es el doble del (ángulo) ZKΓ, y el (ángulo) KΛM el doble del (ángulo) ZΛΓ, entonces el (ángulo) ΘKΛ es igual al (ángulo) KΛM. De manera semejante se demostraría que cada uno de los (ángulos) KΘH, ΘHM, HMΛ es también igual a cada uno de los (ángulos) ΘKΛ, KΛM; por tanto, los cinco ángulos HΘK, ΘKΛ, KΛM, ΛMH, MHΘ son iguales entre sí. Luego el pentágono HΘKΛM es equiángulo. Pero se ha demostrado que también es equilátero y está circunscrito en torno al círculo ABΓΔE.

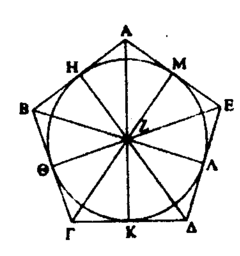
[Por consiguiente, se ha circunscrito un pentágono equilátero y equiángulo en torno al círculo dado.] Q. E. F.[100].

Proposición 13

Inscribir un círculo en un pentágono dado que es equilátero y equiángulo.

Sea ABΓΔE el pentágono dado equilátero y equiángulo.

Así pues, hay que inscribir un círculo en el pentágono ABΓΔE.



Divídanse, pues, en dos partes iguales los ángulos BΓΔ, ΓΔE con las rectas ΓZ, ΔZ, respectivamente; y a partir del punto Z, donde se encuentran las rectas ΓZ, ΔZ entre sí, trácense las rectas ZB, ZA, ZE. Y como BΓ es igual a ΓΔ, y ΓZ es común, los dos (lados) BΓ, ΓZ son iguales a los dos (lados) ΔΓ, ΓZ; y el ángulo BΓZ es igual al ángulo ΔΓZ; entonces la base BZ es igual a la base ΔZ, y el triángulo BΓZ es igual al triángulo ΔΓZ, y los ángulos restantes, subtendidos por los lados iguales, serán iguales respectivamente [I, 4]; por tanto, el ángulo ΓBZ es igual

[100] La conclusión de esta proposición se omite en los manuscritos.

al (ángulo) ΓΔΖ. Y como el (ángulo) ΓΔΕ es el doble del (ángulo) ΓΔΖ, y el (ángulo) ΓΔΕ es igual al (ángulo) ΑΒΓ, mientras que el (ángulo) ΓΔΖ es (igual) al (ángulo) ΓΒΖ, entonces el (ángulo) ΓΒΑ es también el doble del (ángulo) ΓΒΖ; por tanto, el ángulo ΑΒΖ es igual al (ángulo) ΖΒΓ; luego el ángulo ΑΒΓ ha sido dividido en dos partes iguales por la recta ΒΖ. De manera semejante se demostraría que los ángulos ΒΑΕ, ΑΕΔ han sido divididos en dos partes iguales respectivamente por las rectas ΖΑ, ΖΕ. Ahora bien, trácense a partir del punto Ζ las (rectas) ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ perpendiculares a las rectas ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ. Y como el ángulo ΘΓΖ es igual al (ángulo) ΚΓΖ, y el ángulo recto ΖΘΓ es igual al ΖΚΓ, entonces ΖΘΓ, ΖΚΓ son dos triángulos que tienen dos ángulos iguales a dos ángulos y un lado igual a un lado, a saber: ΖΓ común a ambos que subtiende a uno de los ángulos iguales; por tanto, tendrá los lados restantes iguales a los lados restantes [I, 26]; luego la perpendicular ΖΘ es igual a la perpendicular ΖΚ. De manera semejante demostraríamos que cada una de las (rectas) ΖΛ, ΖΜ, ΖΗ es igual a cada una de las (rectas) ΖΘ, ΖΚ; por tanto, las cinco rectas ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ son iguales entre sí. Luego el círculo descrito con el centro Ζ y como distancia una de las (rectas) (Ζ)Η, (Ζ)Θ, (Ζ)Κ, (Ζ)Λ, (Ζ)Μ, pasará también por los demás puntos y tocará las rectas ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ por ser rectos los ángulos correspondientes a los puntos Η, Θ, Κ, Λ, Μ. Pues si no las tocara sino que las cortara, resultaría que la (recta) trazada formando ángulos rectos con el diámetro de un círculo desde un extremo cae dentro del círculo; lo cual se ha demostrado que es absurdo [III, 16]. Por tanto, el círculo descrito con el centro Ζ y como distancia una de las (rectas) (Ζ)Η, (Ζ)Θ, (Ζ)Κ, (Ζ)Λ, (Ζ)Μ no corta las rectas ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ; luego las tocará. Descríbase como ΗΘΚΛΜ.

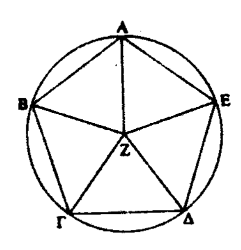
Por consiguiente, se ha inscrito un círculo en un pentágono dado que es equilátero y equiángulo. Q. E. F.

Proposición 14

Circunscribir un círculo en torno a un pentágono dado que es equilátero y equiángulo.

Sea ΑΒΓΔΕ el pentágono dado que es equilátero y equiángulo.

Así pues, hay que circunscribir un círculo en torno al pentágono ΑΒΓΔΕ.



Divídanse, pues, en dos partes iguales los ángulos ΒΓΔ, ΓΔΕ con las rectas ΓΖ, ΔΖ, respectivamente. Y desde el punto Ζ donde se encuentran las rectas, hasta los puntos Β, Α, Ε trácense las rectas ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. De manera semejante al caso anterior se demostraría que los ángulos ΓΒΑ, ΒΑΕ, ΑΕΔ han sido divididos en dos partes iguales por las rectas ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ, respectivamente. Ahora bien, como el ángulo ΒΓΔ es igual al (ángulo) ΓΔΕ, y el (ángulo) ΖΓΔ es la mitad del (ángulo) ΒΓΔ, mientras que el (ángulo) ΓΔΖ es la mitad del (ángulo) ΓΔΕ, entonces el (ángulo) ΖΓΔ es también igual al ángulo ΖΔΓ; de modo que el lado ΖΓ es igual al lado ΖΔ [I, 6]. De manera semejante se demostraría que cada una de las (rectas) ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ es igual a cada una de las (rectas) ΖΓ, ΖΔ; por tanto, las cinco rectas ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ son iguales entre sí. Luego el círculo descrito con el centro Ζ y como distancia una de las rectas ΖΑ,

ZB, ZG, ZD, ZE pasará también por los puntos restantes y estará circunscrito. Circunscríbase y sea ΑΒΓΔΕ.

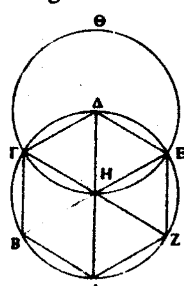
Por consiguiente, ha sido circunscrito un círculo en torno a un pentágono dado que es equilátero y equiángulo. Q. E. F.

Proposición 15

Inscribir un hexágono equilátero y equiángulo en un círculo dado.

Sea ΑΒΓΔΕΖ el círculo dado.

Así pues, hay que inscribir un hexágono equilátero y equiángulo en el círculo ΑΒΓΔΕΖ.



Trácese el diámetro ΑΔ del círculo ΑΒΓΔΕΖ, y tómese el centro Η del círculo, y con el centro Δ y la distancia ΔΗ descríbase el círculo ΕΗΓΘ, y una vez trazadas ΕΗ, ΓΗ llévense hasta los puntos Β, Ζ, y trácense ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ.

Digo que el hexágono ΑΒΓΔΕΖ es equilátero y equiángulo.

Pues como el punto Η es el centro del círculo ΑΒΓΔΕΖ, ΗΕ es igual a ΗΔ. Como el punto Δ es a su vez el centro del círculo ΗΓΘ, ΔΕ es igual a ΔΗ. Pero se ha demostrado que ΗΕ es igual a ΗΔ; por tanto, ΗΕ es también igual a ΕΔ; luego el triángulo ΕΗΔ es equilátero; entonces sus tres ángulos ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ son iguales entre sí, porque los ángulos de la base de los triángulos isósceles son iguales entre sí [I, 5]; y los tres ángulos de un triángulo son iguales a dos rectos [I, 32]; por tanto, el ángulo ΕΗΔ es la tercera

parte de dos rectos. De manera semejante se demostraría que también el ángulo ΔΗΓ es la tercera parte de dos rectos. Y como la recta ΓΗ levantada sobre ΕΒ hace los ángulos adyacentes ΕΗΓ, ΓΗΒ iguales a dos rectos, entonces el (ángulo) restante ΓΗΒ es también la tercera parte de dos rectos; por tanto, los ángulos ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ son iguales entre sí; de modo que los ángulos ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ correspondientes a sus vértices son iguales [I, 15]. Luego los seis ángulos ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ son iguales entre sí. Pero los ángulos iguales están sobre circunferencias iguales [III, 26]; por tanto, las seis circunferencias ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ son iguales entre sí. Pero a las circunferencias iguales las subtienden rectas iguales [III, 29]. Por tanto, las seis rectas son iguales entre sí; luego el hexágono ΑΒΓΔΕΖ es equilátero.

Digo, además, que es también equiángulo.

Pues como la circunferencia ΖΑ es igual a la circunferencia ΕΔ añádase a ambos la circunferencia ΑΒΓΔ; entonces la (circunferencia) entera ΖΑΒΓΔ es igual a la (circunferencia) entera ΕΔΓΒΑ; y el ángulo ΖΕΔ está sobre la circunferencia ΖΑΒΓΔ, y el ángulo ΑΖΕ sobre la circunferencia ΕΔΓΒΑ; por tanto, el ángulo ΑΖΕ es igual al (ángulo) ΔΕΖ [III, 27]. De manera semejante se demostraría que también los ángulos restantes del hexágono ΑΒΓΔΕΖ son cada uno igual a uno de los ángulos ΑΖΕ, ΖΕΔ; por tanto, el hexágono ΑΒΓΔΕΖ es equiángulo. Pero se ha demostrado que es también equilátero; y ha sido inscrito en el círculo ΑΒΓΔΕΖ.

Por consiguiente, se ha inscrito un hexágono equilátero y equiángulo en el círculo dado. Q. E. F.[101].

---

[101] Heiberg considera que Proclo se refiere a éste cuando alude a un porisma que sigue a un problema. El texto de Proclo dice: «el porisma

Porisma:

A partir de esto queda claro que el lado del hexágono es igual al radio del círculo.

De manera semejante al caso del pentágono, si trazamos tangentes al círculo a través de los puntos de división del círculo, se circunscribirá en torno al círculo un hexágono equilátero y equiángulo conforme a lo dicho sobre el pentágono; y además, por procedimientos semejantes a los expuestos en el caso del pentágono inscribiríamos y circunscribiríamos un círculo en un hexágono dado.

Proposición 16

Inscribir un pentadecágono equilátero y equiángulo en un círculo dado.

Sea ABΓΔ el círculo dado.

Así pues, hay que inscribir un pentadecágono equilátero y equiángulo en el círculo ABΓΔ.

Inscríbase en el círculo ABΓΔ el lado AΓ del triángulo equilátero inscrito en él y el (lado) AB del pentágono equilátero; entonces, así como de los segmentos iguales hay 15 en el círculo ABΓΔ, así también habrá cinco en la circunferencia ABΓ que es la tercera parte del círculo, y habrá tres en la circunferencia AB que es la quinta parte del círculo; por tanto, en la (circunferencia) restante BΓ habrá dos. Divídase en dos partes iguales BΓ por el (punto) E

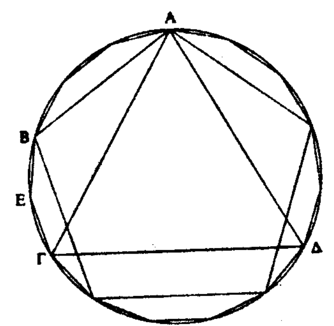
---

que se encuentra en el libro segundo *(tò dè en deutérōi biblíōi...)* es un porisma a un problema». Pero esto no podría aplicarse al único porisma que aparece en el libro II, el siguiente a II, 4. Para salvar esta referencia, Heiberg piensa que en lugar de *tò deutérōi biblíōi* debería leerse *tò d' biblíōi*, es decir, el presente libro IV.

[III, 30], entonces cada una de las circunferencias BE, EΓ es la quinceava parte del círculo ABΓΔ.

Por consiguiente, si después de trazar BE, EΓ, adaptamos al círculo ABΓΔ sucesivamente rectas iguales (a ellas), se habrá inscrito en él un pentadecágono equilátero y equiángulo. Q. E. F.

De manera semejante al caso del pentágono, si trazamos tangentes al círculo por los puntos de división del cír-



culo, se circunscribiría en torno al círculo un pentadecágono equilátero y equiángulo. Además, mediante pruebas semejantes a las del caso del pentágono circunscribiríamos e inscribiríamos un círculo en el pentadecágono dado. Q. E. F.[102].

---

[102] Aquí, como en III, 10, usa el término *kyklon* («círculo») en el sentido inusual de «circunferencia de un círculo», en vez de atenerse a la definición 15 de I «figura plana comprendida por una línea...». Por otra parte, con esta proposición, Euclides termina la exposición de un procedimiento para construir polígonos regulares con 3, 4, 5, 6 y 15 lados. Ahora, dado cualquier polígono regular, podemos construir otro polígono regular con doble número de lados. Siguiendo este proceso, primero se describe un círculo en torno al polígono dado y luego se dividen en dos partes iguales todos los arcos subtendidos por los lados del polígono. Este método permite construir polígonos regulares con 3.2^n, 4.2^n, 5.2^n, 15.2^n lados, donde n es 0, o cualquier entero positivo.

ÍNDICE GENERAL

ELEMENTOS